N° d'ordre A. C. 1079

THÈSES

présentées à la

Faculté des Sciences de l'Université de Paris

pour obtenir

le Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

Abdou Moumouni Dioffo

I. 1ère **THÈSE :** Etude théorique et expérimentale de la répartition de l'énergie du rayonnement concentré dans le plan focal de miroirs paraboliques précis.

II. 2ème **THÈSE :** Etude théorique des caractéristiques optiques (réflexion, absorption, transmission) d'un système de lames diélectriques. Application à l'étude de la captation du rayonnement solaire par des dispositifs utilisant l'effet de Serre et à la polarisation de la lumière naturelle par réfraction dans le cas de lames à pouvoir absorbant non négligeable.

---

05 DEC. 1967

I

Soutenues le *1967 devant la Commission d'Examen*

M. René LUCAS, Membre de l'Institut - Président

MM. A. MARECHAL

F. TROMBE

Examinateurs

PARIS 1967

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

MOUMOUNI Abdou

1re THÈSE. — Etudes théorique et expérimentale de la répartition de l'énergie du rayonnement concentré dans le plan focal de miroirs paraboliques précis du type " Projecteur de D. C. A. "

2me THÈSE. – PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

" Etude théorique des caractéristiques optiques (réflexion, absorption, transmission) d'un système de lames diélectriques. "

Soutenues le 5 Décembre 1967 devant la Commission d'examen.

MM. LUCAS *Président.*

MARECHAL
TROMBE
} *Examinateurs.*

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546604_0069

L'idée et la première ébauche du présent travail ont pris corps pendant un stage effectué au Laboratoire d'Héliotechnique de l'Académie des Sciences de l'URSS . L'élaboration théorique et expérimentale a été conduite sous la bienveillante direction de Monsieur le Professeur René LUCAS , Membre de l'Institut . L'accomplissement de la partie expérimentale a été possible grâce à l'obligeance de MM. F. TROMBE et M. FOEX qui ont bien voulu m'accueillir dans leurs laboratoires de Mont-Louis et me permettre d'en utiliser les différents miroirs paraboliques , l'appareillage de mesure et d'enregistrement et d'y faire construire divers instruments de mesure et autres dispositifs auxiliaires .

Je remercie très sincèrement le Professeur V.A. BAUM et ses collaborateurs , MM. F. TROMBE et M. FOEX et l'ensemble du personnel de leurs laboratoires respectifs , dont les encouragements , conseils et suggestions et la collaboration amicale , m'ont été d'une aide précieuse . Qu'il me soit permis de rendre un hommage particulier et d'exprimer ma profonde gratitude à M. René LUCAS qui a bien voulu guider mes premiers pas dans la recherche et qui , par l'intérêt qu'il n'a cessé de manifester pour la poursuite de mes efforts tout au long d'une décade , a permis la réalisation de ce travail .

I N T R O D U C T I O N

Les travaux onsacrés à l'étude théorique et expérimentale de la concentration du rayonnement solaire par différents types de dispositifs optiques (miroirs paraboliques , cylindriques ou de révolution , systèmes de lentilles , miroirs sphériques ou à facettes etc) ont connu une extension croissante en liaison avec l'apparition et le développement de nombreux laboratoires de recherches . La consécration consécutive aux travaux de MM. Félix TROMBE et Maurice FOEX , du four solaire en tant qu'instrument de recherche (physique et chimie des hautes températures) et installation thermique d'intérêt industriel , le développement de nombreuses et belles recherches relatives à la conversion (classique , thermoélectrique , thermonionique) de l'énergie solaire semblent devoir donner un regain d'intérêt à ces travaux , indépendamment de celui que leur confère la recherche d'une meilleure utilisation du rayonnement concentré et de performances techniques de plus en plus élevées .

Les études expérimentales effectuées par différents auteurs (R. APARISSI , F. TROMBE , M. FOEX et Melle la BIANCHETAIS , H.M. BLAU , LE PHAT VINH , T.S. LAZLO) établissent l'existence d'une répartition non uniforme de l'énergie du rayonnement concentré dans le plan focal de différents types de concentrateurs optiques étudiés . Les résultats conduisent à des courbes expérimentales présentant la même allure exponentielle au voisinage du foyer géométrique , quelle que soit la méthode de mesure utilisée (calorimétrique , radiométrique ou photométrique) .

Par contre , pour la zone périphérique de l'image focale , ils correspondent , selon le concentrateur étudié et la méthode employée , à une courbe présentant (mesures photométriques de R. APARISSI) ou non , un maximum secondaire de la densité de flux observée . Les traitements théoriques proposés pour rendre compte de l'existence et des particularités de la répartition de l'énergie dans le plan focal se caractérisent soit par l'hypothèse d'une

.../..

...\...

perfection de la macrogéométrie et des propriétés optiques de la surface du miroir (F. CABANNES et LE PHAT VINH , A.W. SIMON , P. MAZUR) soit par une tentative de prise en considération des seules imperfections géométriques de la surface au moyen d'une loi de distribution de l'énergie au sein du pinceau réfléchi sur un élément de surface (R. APARISSI) . Les courbes théoriques ainsi obtenues présentent des écarts qualitatifs (allure générale) et quantitatifs notables par rapport aux résultats expérimentaux et ne permettent pas de prévoir ni d'interpréter l'existence (établie expérimentalement par des méthodes différentes) d'un maximum secondaire de la densité d'énergie dans le plan focal .

Le présent travail a eu pour point de départ l'observation de la ressemblance frappante entre la courbe expérimentale (photométrique) de R. APARISSI et la courbe classique de diffraction (ouverture circulaire) , circonstance qui nous a guidé vers une analyse des phénomènes en termes d'optique physique (au lieu de l'approximation de l'optique géométrique utilisée dans tous les travaux antérieurs) et conduit à rechercher un traitement théorique susceptible de traduire aussi bien l'incidence des imperfections de la macro-géométrie parfaite de la surface réflectrice (pourvu que la loi de distribution en soit connue) , que celle de ses défauts optiques (existence d'une micro-structure caractérisée par des "grains de relief" qui diffractent la lumière) . Les calculs théoriques effectués se rapportent exclusivement au cas de réflecteurs paraboliques de révolution , à macro-géométrie et à distribution uniforme des imperfections optiques , conditions réalisées de façon satisfaisante par les miroirs paraboliques précis du type "projecteurs de D.C.A" dans l'hypothèse (apparemment acceptable) où leur construction met en jeu des retouches réparties statistiquement sur toute la surface . Le cas plus général et bien plus complexe , d'une macro-géométrie imparfaite correspond à une loi de distribution connue des valeurs de l'angle d'écart entre la surface réelle et la surface idéale (loi qu'on peut supposer pré-

.../..

senter la symétrie de révolution du miroir) et d'une distribution non uniforme des imperfections optiques , semble redevable des mêmes méthodes de traitement et doit faire l'objet d'un travail ultérieur . Quoi qu'il en soit , les résultats théoriques conduisent à une courbe de répartition de l'énergie présentant un maximum secondaire dans la zone périphérique de l'image focale et une décroissance d'allure exponentielle dans le voisinage immédiat du foyer géométrique .

La non-observation du maximum secondaire de la densité de flux énergétique par de nombreux expérimentateurs utilisant la méthode radiométrique et l'insuffisance , à différents titres , des résultats expérimentaux disponibles pour une confrontation correcte avec les résultats théoriques , justifient l'importance accordée à l'étude expérimentale (méthodes photométrique , radiométrique et calorimétrique) de la répartition de l'énergie dans le plan focal de miroirs paraboliques du type "projecteur de D.C.A." et à la mise en évidence expérimentale de l'existence du maximum secondaire prévu par la théorie (méthodes photométrique et radiométrique) . En particulier , les circonstances de la mise au point et de l'utilisation du radiomètre thermo-électrique à disque récepteur circulaire ayant servi à effectuer les enregistrements des courbes expérimentales relatives à différents miroirs paraboliques nous ont conduit à une analyse du fonctionnement de ce type d'appareil (en régimes permanent et variable) qui semble permettre de rendre compte de différentes "anomalies" observées dans la conduite de mesures radiométriques . La méthode calorimétrique (sous une forme différentielle) a été appliquée à l'étude expérimentale de la zone centrale de la tache focale et semble conduire également à la mise en évidence du maximum secondaire (ce résultat appelle toutefois des réserves , compte tenu de la précision insuffisante des mesures) .

La présentation adoptée répond au souci de séparer nettement d'une part , le traitement théorique proposé , de l'autre ,

l'étude expérimentale effectuée , de façon à permettre une confrontation plus claire des résultats théoriques et expérimentaux. Une première partie est consacrée à la discussion des travaux théoriques et expérimentaux antérieurs ; les fondements physiques et le schéma général des calculs sont ensuite exposés puis appliqués à un miroir parabolique à macrogéométrie parfaite , la source du rayonnement incident étant ponctuelle (rayons rigoureusement parallèles) ou de diamètre apparent non nul (rayons d'ouverture angulaire non nulle) et la possibilité d'approximer la courbe théorique par une courbe exponentielle est établie ; la troisième partie se rapporte à l'étude expérimentale de la répartition de l'énergie dans le plan focal de différents miroirs paraboliques du type projecteur de D.C.A. ; enfin il est procédé à la comparaison des résultats théoriques et expérimentaux et à l'examen et la discussion de l'incidence des particularités de la courbe de la courbe de répartition de l'énergie sur les valeurs de l'énergie encerclée dans l'image focale .

TABLE DES MATIERES

Première Partie : Revue sommaire des travaux consacrés à l'étude théorique et expérimentale de la répartition de l'énergie dans le plan focal de concentrateurs optiques de rayonnement.

I - Travaux théoriques relatifs à la répartition de l'énergie du rayonnement concentré dans le plan focal de différents dispositifs optiques..... 1

II- Etude expérimentale de la répartition de l'énergie dans le plan focal de miroirs paraboliques..... 2

III- Discussion des résultats expérimentaux. Comparaison des courbes théoriques et expérimentales..... 7

Bibliographie..... 14

Deuxième Partie : Etude théorique de la répartition de l'énergie dans le plan focal d'un miroir parabolique à macro-géométrie parfaite.

I - Conditions et particularités physiques et géométriques de la concentration du rayonnement par les surfaces réflectrices réelles..... 16

A - Macro-géométrie des surfaces réflectrices réelles 16

B - Propriétés optiques des surfaces réflectrices réelles..... 19

C - Particularités propres aux sources habituelles de rayonnement..... 19

II - Hypothèses simplificatrices et schéma général des calculs, notations.

A - Sur une équivalence entre le cas d'une réflexion simple et celui d'une réflexion précédée et suivie d'une transmission à travers une lame transparente 20

B - Hypothèses simplificatrices..... 22

C - Schéma général des calculs..... 23

1°- Notations..... 23
2°- Schéma général de la conduite des calculs..... 25
3°- Expression générale de l'intensité du rayonnement diffracté par un élément de surface du miroir sur un élément de surface du plan focal.... 26

4° - Etude de l'image focale de l'approximation de Gauss dans le cas d'une réflexion idéale : structure, symétrie de l'image et de la répartition de l'énergie..... 27

III- Expression explicite de la densité d'énergie du rayonnement concentré autour d'un point du plan focal.

A - Expression formelle de la densité d'énergie autour d'un point du plan focal.

1° - Calculs et résultats préliminaires..... 29
2° - Expression formelle de la densité d'énergie autour d'un point du plan focal..... 31
3° - Expression explicite de la densité d'énergie autour d'un point du plan focal..... 31

IV- Examen du cas particulier d'un rayonnement incident provenant d'une source de diamètre apparent nul.

A - Discussion de l'intérêt de ce cas particulier. Conditions dans lesquelles il peut constituer une approximation acceptable..... 34
B - Expression particulière de la densité d'énergie autour d'un point du plan focal..... 35

1° - Expression générale (point quelconque)..... 36
2° - Expression de la densité d'énergie au foyer géométrique du miroir..... 38

C - Expression explicite de la densité d'énergie autour d'un point du plan focal dans l'hypothèse d'un rayonnement incident assimilable à celui d'un corps noir à la température T ° K.

1° - Discussion de l'hypothèse proposée..... 41
2° - Calcul de la densité d'énergie dans le plan focal..... 43
3° - Courbes théoriques de la répartition de l'énergie dans le plan focal..... 45

D - Etude des particularités de la courbe de répartition de l'énergie dans le plan focal..... 49

E - Obtention d'une approximation de type exponentiel pour la courbe théorique de répartition de l'égergie dans le plan focal..... 65

F - Conclusions générales..... 71

V - Etude de la répartition de l'énergie dans le plan focal d'un miroir parabolique à macro-géométrie parfaite dans le cas d'une source de diamètre apparent fini et non nul.

A - Remarques et calculs préliminaires..... 74
B - Expression explicite de la densité élémentaire d'énergie..... 82
C - Expression approchée de la densité d'énergie du rayonnement total..... 88
D - Comparaison des résultats avec ceux du cas particulier précédent. Discussion et conclusions..... 93
Bibliographie..... 98

Troisième Partie : Etude expérimentale de la répartition de l'énergie dans le plan focal de miroirs paraboliques précis du type "projecteurs de D. C. A. ".

I - Choix des méthodes de mesure..... 99
II- Description et caractéristiques de l'appareillage utilisé. Conduite des mesures. Précision des résultats.

A - Méthode calorimétrique 100
B - Méthode radiométrique 106
C - Méthode photométrique 119

III- Résultats expérimentaux

A - Méthode calorimétrique..... 122
B - Méthode radiométrique 123
C - Méthode photométrique..... 125
D - Comparaison des résultats expérimentaux obtenus par les différentes méthodes de mesure. Discussion et conclusions..... 126

IV - Bibliographie..... 128

Quatrième Partie : Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux. Discussion et conclusions.

I - Discussion des conditions d'applicabilité du traitement théorique au cas des miroirs paraboliques réels (macro-géométrie non rigoureusement parfaite)..... 130

II - Comparaison des courbes théoriques et expérimentales relatives aux miroirs paraboliques étudiés. Discussion et conclusions..... 133

Bibliographie..... 144

Cinquième Partie : Incidence des particularités de la courbe de répartition de l'énergie dans le plan focal sur l'énergie encerclée dans la tache focale. Facteurs qui déterminent l'allure de la variation de l'énergie encerclée dans le plan focal. Conclusions.....

I - Variation de l'énergie encerclée dans la tache focale et son rapport avec les particularités de la courbe de répartition de l'énergie. Discussion des résultats théoriques et expérimentaux antérieurs. 145

II - Discussion des résultats théoriques du traitement proposé et des nouveaux résultats expérimentaux. 148

III- Facteurs qui déterminent la variation de l'énergie encerclée dans le plan focal..... 150

Bibliographie..... 153

-:-:-:-

PREMIERE PARTIE

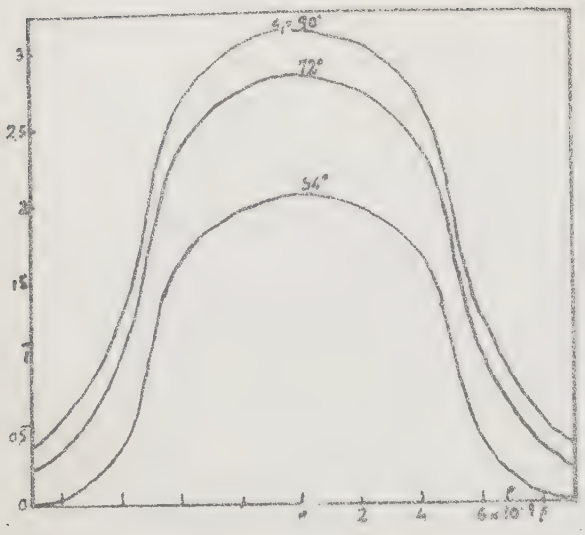
REVUE SOMMAIRE DES TRAVAUX CONSACRES A L'ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE LA REPARTITION DE L'ENERGIE DANS LE PLAN FOCAL DES CONCENTRATEURS OPTIQUES DE RAYONNEMENT

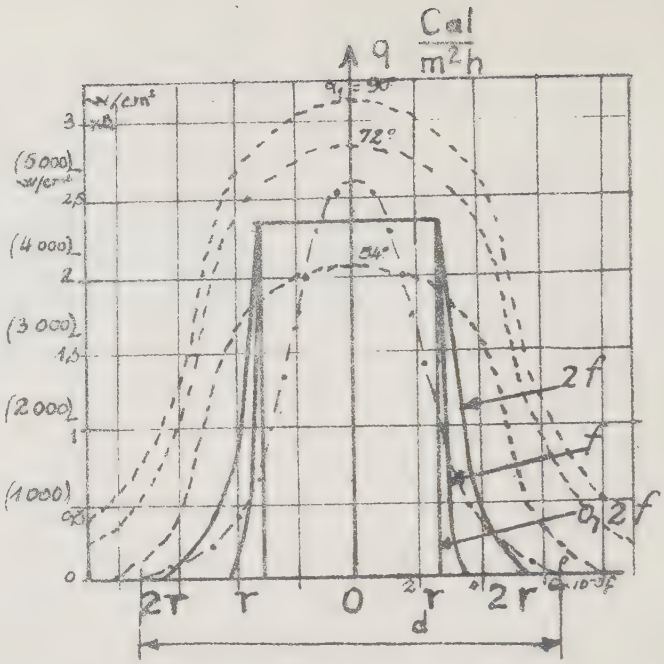
L'étude théorique et expérimentale de la loi de répartition de l'énergie dans le plan focal de différents types de concentrateurs optiques de rayonnement a fait l'objet de nombreux travaux théoriques et expérimentaux . Le cas - très important sur le plan théorique et pratique - des miroirs paraboliques a particulièrement retenu l'attention de différents chercheurs .

I. TRAVAUX THEORIQUES RELATIFS A LA REPARTITION DE L'ENERGIE DU RAYONNEMENT CONCENTRE DANS LE PLAN FOCAL DE DIFFERENTS DISPOSITIFS OPTIQUES .

A) Le premier traitement théorique du problème de la répartition de l'énergie du rayonnement concentré dans le plan focal d'un miroir parabolique , a été proposé par F. CABANNES et LE PHAT VINH[1] . En admettant une géométrie et des propriétés optiques parfaites de la surface réflectrice et une brillance énergétique uniforme du "disque solaire" , ces auteurs obtiennent des courbes théoriques présentant un palier horizontal dans la région centrale de la tâche focale (l'image de Gauss de la source) , une branche décroissante dans la zone périphérique et un tracé qui varie avec l'ouverture du miroir étudié .

B) Par la suite , de nombreux auteurs ont développé des traitements théoriques fondamentalement équivalents au précédent à l'extension plus considérable des calculs et à des différences mineures dans le tracé des courbes près : notamment P. JOSE[2] , A.W. SIMON[3] , P. MAZUR[4] , N. HUKUO et H. MII[5] .

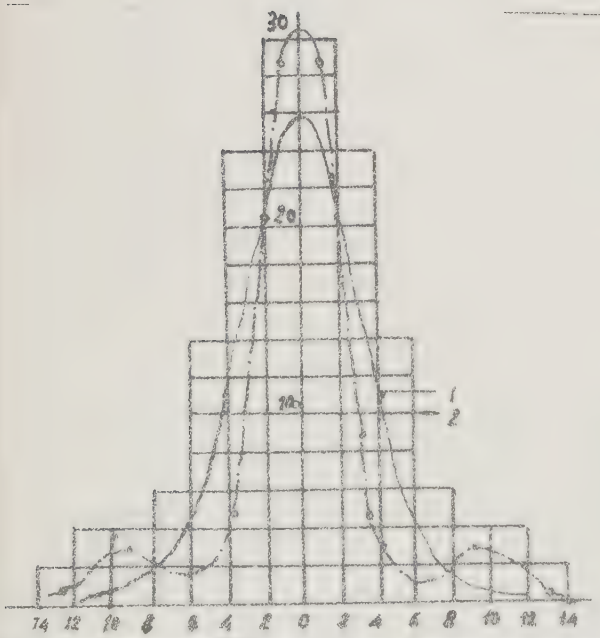


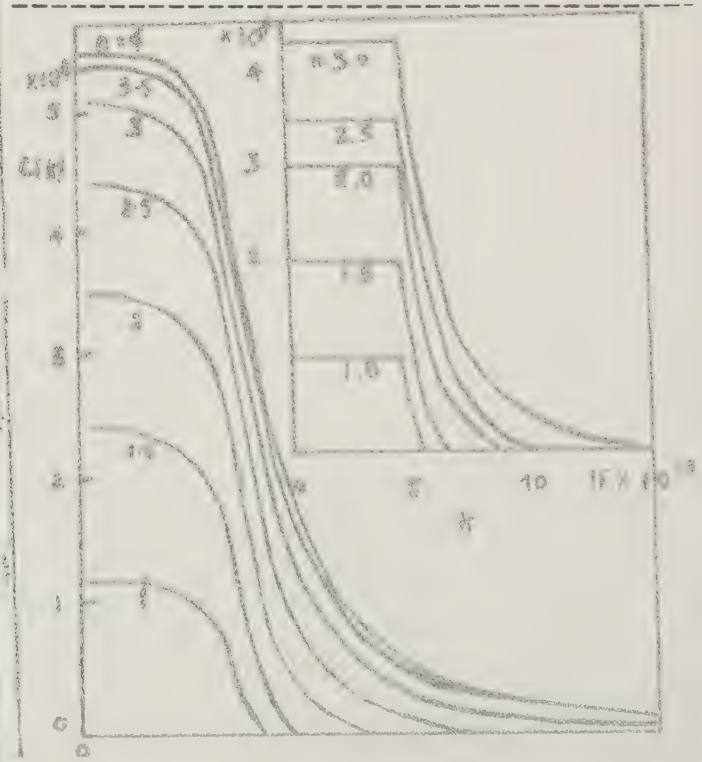


Courbes Théoriques de LE PHAT VINH

Courbes de LE PHAT VINH ---
Courbes de F. CABANNES et LE PHAT VINH, H. MII
Courbe de R. APARISSI -.-.-.

Courbes théoriques de H. MII (palier horizontal) et de O. KAMADA





1. Courbe théorique de R. APARISSI
2. Courbe photométrique de R. APARISSI

C) R.R. APARISSI[6] a étudié théoriquement la répartition de l'énergie dans l'image focale des miroirs paraboliques de révolution et cylindro-paraboliques . Les imperfections géométriques des surfaces réflectrices réelles sont prises en considération en postulant , au sein du pinceau élémentaire réfléchi sur un élément de surface du miroir , une loi de distribution angulaire de l'énergie du type de Gauss-Laplace que l'auteur justifie en s'appuyant sur les travaux de H. SCHMALTZ [7] relatifs à la précision des surfaces optiques . La courbe théorique correspondante est une "courbe en cloche" de Gauss , dont le maximum et le rythme de décroissance sont déterminés simultanément par les valeurs de l'ouverture angulaire du miroir et du "critère de précision" h de sa surface .

D) LE PHAT VINH [8] dans son travail de thèse , a développé un traitement théorique qui reprend les calculs déjà effectués par cet auteur et F. CABANNES[1] en tenant compte de la variation de la brillance énergétique à la surface du disque solaire. O. KAMADA[9] en a donné récemment une version utilisant une forme analytique plus simple pour traduire le phénomène d'assombrissement du disque solaire sur les bords . Le tracé des courbes théoriques obtenues est caractérisé par la substitution d'un maximum méplat au palier horizontal de la courbe théorique de F. CABANNES et LE PHAT VINH.

L'allure générale et les particularités graphiques des courbes théoriques correspondant aux différents traitements analysés sont illustrées sur la figure 1 .

I. ETUDE EXPERIMENTALE DE LA REPARTITION DE L'ENERGIE DANS LE PLAN FOCAL DE MIROIRS PARABOLIQUES .

Différents auteurs ont étudié expérimentalement la répartition de l'énergie du rayonnement solaire ou lunaire concen-

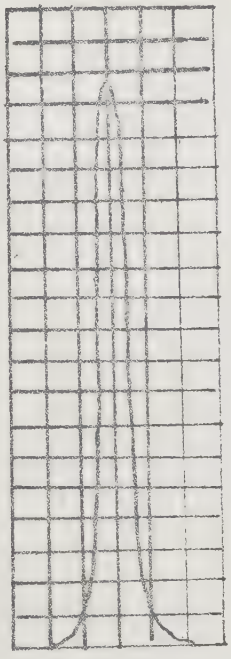
tré dans le plan focal des miroirs paraboliques en mettant en oeuvre , selon le cas et sous des formes variées , les méthodes calorimétrique , photométrique ou radiométrique .

A) Mesures utilisant la méthode calorimétrique . R. APARISSI[6] F. TROMBE , M. FOEX et Mlle LA BLANCHETAIS , B.V. TARNIJEVSKI , A.D. ROZGOVOROV et I.G. SAVTCHENKO ont appliqué la méthode calorimétrique dans deux versions différentes , sans recourir à aucune atténuation du rayonnement solaire incident ou du flux énergétique étudié .

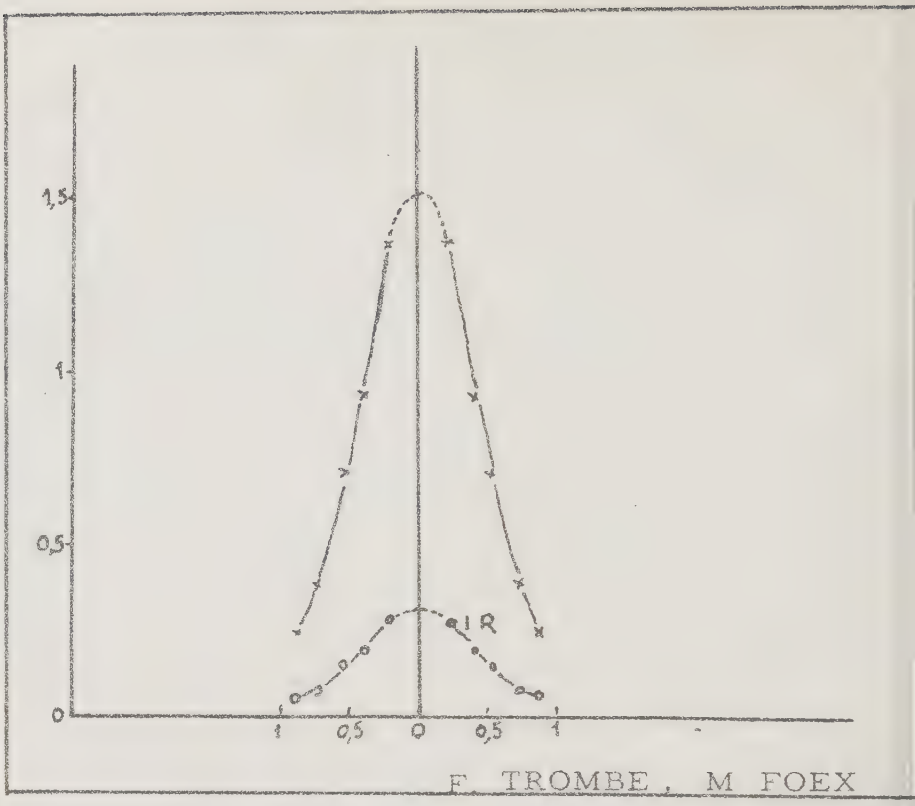
Le premier auteur qui a étudié deux miroirs paraboliques de précision géométrique différente (projecteur de D.C.A , miroir à carcasse de béton et facettes de glace courbées par contrainte) a utilisé un calorimètre plat à circulation d'eau et surface réceptrice circulaire complètement peinte en blanc (faible pouvoir absorbant e_b) lors d'une première série de mesures puis comportant pour une seconde série de mesures une couronne circulaire de faible largeur et de rayon moyen variable peinte en noir (pouvoir absorbant e_n voisin de l'unité) . Les résultats permettaient de déduire la valeur de la densité vraie de flux énergétique à une distance du foyer égale au rayon moyen de la couronne peinte par la formule :

$$I_R = \frac{\Delta Q}{(e_n - e_b)\Delta S}$$ avec une précision de 10 à 15 % .

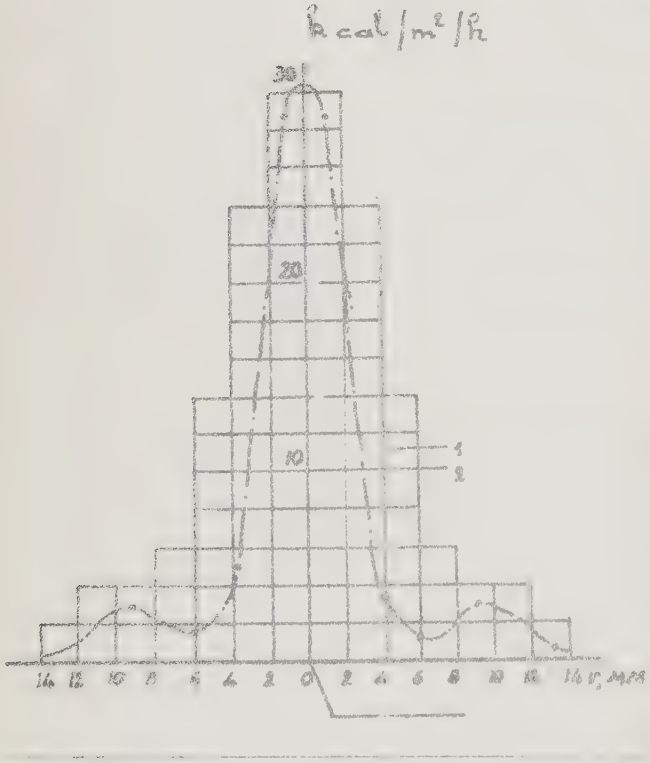
Les deux groupes d'auteurs suivants ont respectivement étudié un miroir du type projecteur de D.C.A et un miroir approximativement parabolique obtenu par déformation sous vide d'une membrane de matière plastique métallisée et utilisé un diaphragme circulaire pour définir , dans le plan focal , le diamètre relatif à "l'énergie encerclée" , cette dernière étant mesurée au moyen d'un calorimètre à circulation d'eau convenablement placé. Les résultats donnaient directement la densité moyenne de flux

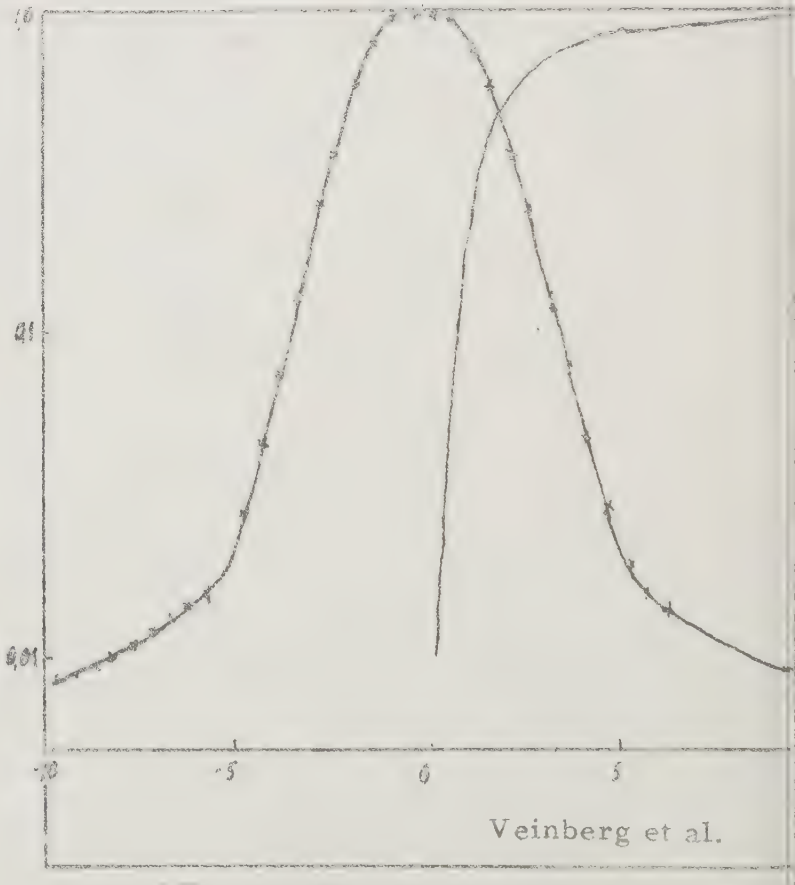


T. S. LAZLO



F. TROMBE, M. FOEX





Veinberg et al.

énergétique pour des cercles de rayon variable du plan focal et permettaient d'évaluer , dans le cas d'une variation suffisamment lente du rayon du diaphragme , la densité vraie de flux énergétique relative au rayon moyen des couronnes successives définies par deux ouvertures des diaphragmes de diamètres voisins . La précision moyenne des résultats atteignait 3 à 5% pour les valeurs de la densité moyenne de flux énergétique et 6 à 10 % pour celles de la densité vraie (fig. 2) .

B) Mesures utilisant des méthodes photométriques . R. APARISSI[6], H. HISADA , H. MII et COLL [12] , M.D. YOUGADEV, A.Y. BACHNIAK , Y.E. NETCHAEV et COLL[13] , V.B. VEINBERG , G.Y. KONAEVA et D.K. SATTAROV[14] , ont appliqué diverses méthodes photométriques à l'étude expérimentale de la répartition de l'énergie du rayonnement lunaire (pleine lune par ciel clair) concentré dans le plan focal de miroirs paraboliques du type "projecteur de D.C.A" .

Le premier et les derniers auteurs ont concurremment utilisé les méthodes photographique (exposition convenable d'une plaque photographique appropriée suivie de mesures de densitométrie optique effectuées au microphotomètre) et photométrique(utilisation d'un "luximètre" à photocellule , cette dernière étant de faibles dimensions et présentant une courbe de sensibilité satisfaisante) . Les mesures conduisaient aux valeurs relatives (rapportées à la valeur maximale observée au foyer géométrique du miroir) de la densité vraie de flux énergétique avec une précision moyenne évaluée à 3-6% .

L'équipe de H. ISADA a mis en oeuvre la méthode photographique suivie de mesures de densitométrie optique et de calculs permettant de déduire , des résultats expérimentaux obtenus

en travaillant avec la pleine lune , la courbe de répartition de l'énergie dans le cas du rayonnement solaire .

Récemment , V.B. VEINBERG , G.Y. KONAEVA et D.K. SATTAROV[14] ont utilisé une méthode photométrique basée sur les propriétés optiques des boules sphériques concentriques transparentes à couches homogènes différentes . Le récepteur , constitué par une boule "microscopique" à 2 couches , prolongée par un canal "conducteur-optique" protégé , se déplaçait dans la tache focale du miroir étudié . Une "sphère photométrique" placée au bout du "conducteur optique" permettait d'effectuer des mesures au photomultiplateur d'électrons . Le très faible diamètre de la boule (10 à 300µ) permettait une exploration directe pratiquement ponctuelle de l'image focale .

La précision moyenne des résultats (fig. 3) non indiquée par les auteurs , parait pouvoir être estimée à 3-5% .

C) Mesures utilisant la méthode radiométrique .

LE PHAT VINH[8] , H.H. BLAU[15] , T.S. LAZLO[16] , ont appliqué la méthode radiométrique , le premier dans l'étude expérimentale de la répartition de l'énergie du rayonnement solaire concentré dans le plan focal du grand miroir parabolique à facettes courbées de Mont Louis , les deux derniers auteurs pour obtenir des enregistrements de la variation de la densité de flux énergétique du rayonnement solaire concentré dans le plan focal de miroirs paraboliques de type "projecteur de D.C.A" à surface de cuivre rhodié et stellite sur bronze poli .

En fait , les mesures de LE PHAT VINH , effectuées avec une thermopile de MOLL et un dispositif atténuateur , se rapportaient à un élément (facette de verre courbée de 1367cm^2) de la surface du miroir que l'auteur déplaçait en réglant la courbure le long d'une parabole génératrice . Les résultats expérimentaux relatifs aux différentes positions de la facette permettaient en principe d'en déduire ceux relatifs aux couronnes correspondantes , d'où la courbe de répartition de l'énergie dans le plan focal . L'auteur, dont le travail expérimental visait une évaluation

des performances du procédé de réalisation de grands miroirs par la méthode des facettes courbées sous contrainte mécanique , a limité ses calculs au cas du foyer géométrique du miroir .

Pour leurs mesures , les deux derniers auteurs ont utilisé une version à circulation d'eau de refroidessement , du radiomètre thermo-électrique à disque récepteur circulaire (constantan convenablement noirci) et thermocouple cuivre constantan décrit par R. GARDON[17] . L'appareil dont les dimensions géométriques (en particulier diamètre du disque récepteur ≈ 1mm) et les autres caractéristiques (temps de réponse , sensibilité , flux maximum mesurable) étaient choisies en fonction des conditions d'utilisation , défilait à une vitesse convenable dans le plan focal du miroir étudié ; un dispositif permettait d'enregistrer la variation de la f/é/m thermo-électrique . Selon la sensibilité du radiomètre une atténuation préalable du rayonnement est nécessaire (T.S. LAZLO) ou non (H. BLAU) .

La précision des mesures , évaluée à partir de l'étalonnage effectué en régime permanent de fonctionnement de l'appareil est estimée à 3-5% (Fig. 4)

D) Mesures relatives à l'incidence d'une défocalisation sur la courbe de répartition de l'énergie .

E.C.SHULTS , R. POPLAWKY et H. BOHM[18] , R.A. ZAKHIDOV et D.I. TEPLIAKOV[19] ont effectué des mesures permettant une appréciation de l'influence soit d'une erreur de repérage du plan focal , soit d'une défocalisation due à une erreur de pointé de l'axe de révolution du miroir étudié .

En fait , les mesures effectuées par les premiers auteurs visaient la mise au point d'un dispositif atténuateur respectant la symétrie de révolution de la géométrie du miroir et du rayonnement solaire incident . Les résultats comportent pourtant , en dehors de courbes expérimentales correspondant à différentes valeurs du facteur d'atténuation , une courbe donnant la répartition de l'énergie dans un plan situé à 5mm en arrière

du plan focal (pour une distance focale de 650mm) . Ni la méthode utilisée , ni la précision des mesures ne sont indiquées par les auteurs .

R.A. ZAKHIDOV et D.I. TEPLIAKOV ont étudié expérimentalement et de façon systématique l'influence sur "l'énergie encerclée" dans le plan focal d'un miroir parabolique du type "projecteur de D.C.A" , d'une défocalisation consécutive à une erreur de pointé de l'axe du miroir sur le soleil . Les mesures étaient effectuées à l'aide de calorimètres à circulation d'eau de différents diamètres (6 à 36 mm pour une distance focale de 689mm) centrés successivement sur le foyer dans des conditions variables de défocalisation . La courbe expérimentale de répartition de l'énergie dans le plan focal (conditions de focalisation) et les courbes de variation de l'énergie encerclée avec l'angle de défocalisation obtenues par cette méthode permettent d'évaluer à 3-5' d'arc (12 à 20" de durée) la valeur maximale de la défocalisation pouvant être considérée comme sans effet pratiquement décelable sur la répartition de l'énergie dans le plan focal dans les conditions usuelles de mesure .

Les différents résultats expérimentaux (fig. 5) correspondent à une précision moyenne de 3 à 5% .

I. DISCUSSION DES RESULTATS EXPERIMENTAUX . COMPARAISON DES COURBES THEORIQUES ET EXPERIMENTALES

A) Discussion des résultats expérimentaux

1) Différents facteurs : ordre de grandeur généralement élevé des densités de flux énergétique étudiées (jusqu'à 4 KW/cm^2) , étendue très restreinte du champ de mesure (une fraction de cm^{2}à quelques cm^2 pour les miroirs paraboliques du type "projecteur de D.C.A") , mouvement apparent du soleil (ou de la lune) imposant une durée limite (de l'ordre d'une vingtaine de secondes) , pour chaque mesure y compris dans le cas d'un guidage précis et automatique du miroir réalisé par asservissement ,

nécessité de réduire au strict minimum inévitable la perturbation du phénomène étudié engendrée par la présence du dispositif de mesure (ombre portée sur le miroir et éventuellement modification de la symétrie géométrique du rayonnement incident) , réalisation toujours approximative du pointé de la source et du repérage du plan focal du miroir, constituent autant de sources permanentes de difficultés de montage et d'erreurs de mesure , généralement malaisées à apprécier .

2) La précision moyenne des résultats expérimentaux varie assez largement d'une méthode à l'autre et suivant les conditions concrètes de mise en oeuvre par les différents expérimentateurs , conditions qui entraînent , conformément aux remarques du paragraphe précédent , des erreurs systématiques parfois insoupçonnées des auteurs et pouvant en particulier correspondre à un fonctionnement effectif de l'appareil de mesure différent de celui qui est supposé (cas du radiomètre thermo-électrique utilisé en régime variable - dynamique - alors que les enregistrements sont analysés en termes de résultats théoriques et expérimentaux relatifs à un fonctionnement statique - régime permanent- , circonstance qui a été examinée ailleurs[20] .

De même , la sensibilité des dispositifs de mesure, qui détermine l'allure des résultats expérimentaux , correspondant à la zone périphérique de la tache focale , dépend très largement de la méthode de mesure et du type d'appareil utilisés : excellente dans le cas de mesures photométriques directes , elle n'est que moyenne s'agissant de mesures radiométriques et devient médiocre pour des mesures calorimétriques .

3) Compte tenu des remarques et considérations précédentes , l'examen des résultats expérimentaux obtenus dans le cas de miroirs paraboliques précis (type "projecteur de D.C.A") conduit aux conclusions suivantes :

a) Quel que soit le miroir (précis) étudié et la méthode de mesure appliquée , la courbe expérimentale présente une symétrie satisfaisante autour du foyer géométrique et correspond à une répartition non uniforme , à décroissance rapide de type exponentiel de la densité de flux du rayonnement dans la zone centrale de l'image focale de la source (grosso modo image de Gauss) .

b) l'allure de la courbe expérimentale dans la zone périphérique de la tache focale varie avec la sensibilité de la méthode utilisée ; tandis que les mesures calorimétriques et radiométriques conduisent à une courbe à décroissance monotone, la méthode photométrique fait apparaître l'existence d'un maximum secondaire de la densité de flux énergétique . Les conditions de mesure (pleine lune au lieu du soleil comme source) ne semblent pas permettre d'écarter la présence d'une telle singularité ; la sensibilité plus grande et le temps de réponse quasi nul propres à la méthode photométrique semblent au contraire plaider en faveur de la prise en considération de ce résultat , qui a d'ailleurs été confirmé[21] par deux méthodes différentes de celle de R. APARISSI et indépendantes entre elles (mesures radiométriques et photométriques) .

B) Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux relatifs aux miroirs paraboliques précis .

L'hypothèse d'une perfection géométrique de la surface du miroir admise dans tous les traitements théoriques (à l'exclusion de celui de R. APARISSI) impose de se limiter aux seuls résultats expérimentaux relatifs aux miroirs les plus précis (type "projecteur de D.C.A) .

1) Allure générale de la courbe de répartition de l'énergie dans le plan focal .

a) En ce qui concerne la zone centrale de la tache focale , les courbes théoriques de F. CABANNES et LE PHAT

VINH , P. MAZUR , O. KAMADA se différencient nettement des courbes expérimentales par le caractère du maximum (très aplati sur les premières , au contraire très aigu sur les secondes) et de la variation de la pente . La courbe théorique de R. APARISSI paraît s'accorder mieux sous l'angle qualitatif avec les résultats expérimentaux .

b) A la périphérie de l'image focale , la discordance entre les courbes théoriques et expérimentales demeure importante tant que l'ordre de grandeur de la densité de flux observée reste assez notable pour donner un sens aux résultats de mesure (points pas trop éloignés du foyer géométrique : d ~ l à λ f α_0) . La courbe théorique de R. APARISSI se distingue encore par un meilleur accord qualitatif avec les courbes expérimentales.

c) Aucune des courbes théoriques ne prévoit et ne permet d'interpréter l'existence du maximum secondaire de la densité de flux énergétique dans le plan focal observé expérimentalement (mesures photométriques de R. APARISSI , radiométriques et photométriques de l'auteur) .

2) Ordre de grandeur des écarts quantitatifs observés entre les courbes théoriques et expérimentales .

Les profils des courbes théoriques de F. CABANNES et LE PHAT VINH , LE PHAT VINH , P. MAZUR , O. KAMADA sont tels que les écarts observés par rapport aux résultats expérimentaux correspondants sont de l'ordre de 200 à 300 % en dehors de l'origine (foyer géométrique) , la coïncidence étant réalisée pour ce point. La courbe théorique de R. APARISSI présente également des écarts comparables (jusqu'à 200 % et plus) dans les régions centrale et périphérique de la tache focale , malgré un tracé apparemment plus proche de celui des courbes expérimentales . Il est à noter que ces écarts deviennent nettement plus réduits dans le cas de miroirs paraboliques peu précis (30 à 100 %) .

C) Discussion de l'origine des écarts observés . Conclusions

La précision moyenne des méthodes de mesures utilisées ne permettant pas de justifier des écarts quantitatifs aussi importants , leur origine paraît devoir être recherchée dans les approximations implicitement ou explicitement faites dans les calculs théoriques .

1) Bien que les miroirs étudiés soient généralement du type "projecteur de D.C.A" (donc parmi les plus précis que l'on sait construire) , l'hypothèse d'une perfection géométrique de la surface réflectrice n'est satisfaite que de façon approchée et ses conséquences ne se prêtent pas aisément à une évaluation précise . Cependant , le meilleur accord des courbes théoriques de R. APARISSI avec les résultats expérimentaux quand la précision du miroir devient médiocre , semble indiquer que le cas des miroirs précis correspond à une approximation suffisante de la perfection géométrique .

2) L'hypothèse d'une perfection des qualités optiques de la surface du miroir (réflexion idéale correspondant à l'approximation de l'optique géométrique) semble , compte tenu des résultats de l'étude expérimentale des surfaces optiques (micro-géométrie des "surfaces polies" , grains de relief de dimensions latérales impliquant une diffraction importante du rayonnement) , devoir être considérée comme la source principale du désaccord des traitements théoriques proposés avec les observations expérimentales . En effet pour un grain de relief circulaire de diamètre $d = 0,1mm$ (cas d'un polissage de bonne qualité) , le premier anneau de diffraction correspond à un écart angulaire $\varphi = 1,22\frac{\lambda}{d}$ variant entre 0,74 et 2.10^{-2} radian pour les différentes radiations solaires incidentes , ce qui semble bien indiquer la part prépondérante de ce mécanisme dans la redistribution de l'énergie dans le plan focal des miroirs précis (angle d'écart moyen de l'ordre de $0,3.10^{-2}$ radian) . Par ailleurs , la faible incidence sur le profil de la courbe théorique , de la prise en considération

de l'assombrissement du disque solaire sur les bords (LE PHAT VINH) semble confirmer les conclusions précédentes .

3) L'hypothèse d'une distribution angulaire de l'énergie de type Gauss-Laplace au sein d'un pinceau élémentaire réfléchi faite par R. APARISSI revient à tenir compte des seules imperfections géométriques de la surface du miroir (macro-géométrie) tout en négligeant celles à caractère optique liées à la micro-géométrie de la surface . Dans la mesure même où le miroir considéré est précis , il est clair , d'après les ordres de grandeur des écarts angulaires respectifs imputables à la diffraction et aux imperfections macro-géométriques , qu'une telle procédure ne peut refléter assez fidèlement le mécanisme complexe de la redistribution de l'énergie : avec $\alpha m << \varphi m$, la prise en considération de αm seul ne constitue qu'une approximation plutôt grossière qui s'améliore d'ailleurs dès que $\alpha m >> \varphi m$ (miroirs de précision médiocre) . Cette circonstance peut expliquer l'ambiguïté de la signification physique du "critère de précision" h introduit par R. APARISSI et les discordances constatées entre les valeurs théoriques de ce paramètre calculées pour différents miroirs paraboliques par R. APARISSI , V.A. BAUM et D. TEPLIAKOV[22] et celles déduites de la mesure de l'angle d'écart moyen du miroir étudié en interprétant h conformément à la formule

$$E = E_o \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2\varphi^2)$$

comme étant lié à l'écart angulaire quadratique moyen par la relation $h = 1/m\sqrt{2}$. Ainsi pour $m = 15' \simeq 0{,}42.10^{-2}$ radian, $h = 4{,}4$ d'où $\alpha m \simeq 4/31$ radian et pour $m = 1°$ $h = 0{,}9$, d'où $\alpha m \simeq 20/31$ radian .

4) Conclusions

a) De façon tout-à-fait générale , le désaccord des traitements théoriques examinés avec les résultats expérimentaux semble pouvoir se rattacher à l'insuffisance d'une approche utilisant l'approximation de l'optique géométrique .

b) La prise en considération simultanée

des imperfections géométriques et optiques de la surface du miroir implique une connaissance de leur loi de distribution superficielle ou des hypothèses adéquates pour suppléer à l'insuffisance éventuelle des données disponibles . Quoi qu'il en soit , l'importance plus grande des miroirs précis pour les applications pratiques permet de se limiter à l'approximation d'une macro-géométrie pratiquement parfaite en tenant compte des imperfections optiques .

c) Incidemment , les résultats théoriques et expérimentaux montrent la faible incidence (comparée à celles des imperfections optiques et géométriques de la surface , du diamètre apparent du soleil) de la non uniformité de la brillance énergétique du disque solaire sur la répartition de l'énergie dans le plan focal .

BIBLIOGRAPHIE

1. F. CABANNES et LE PHAT VINH , J. Phys. Rad., 15, p 817, 1954

2. P. JOSE , Solar Energy , 1, N° 4 p 19, 1957

3. A.W. SIMON, Solar Energy , 2, N° 2, p22-25 1958 ; 3,N°4,p 67,1959

4. P. MAZUR , Solar Energy , 6, N° 1, p 23 , 1962

5. N. HUKUO et H. MII, Solar Energy , 1, N°2-3 , p 108 , 1957

6. R. APARISSI Kontsentratsja solnechnoj energii v geliotekhnicheskikh sooruzheniakh (kand. Dissert. Energ. Inst. Akad. Nauk SSSR 1955) ; Eksperimentaljnaja ustanovka dlja poluchenija vusokikh temperatur . Ispoljzovanie solnechnoj energii sbnik I Izd-Vo Akad. Nauk SSSR 1957 , p 151

7. H. SCHMALTZ Kachestvo poverkhnesti , Gos Nauch-Tech. Izd-vo Mach. Lit. Moskva 1941

8. LE PHAT VINH - Thèse de doctorat d'Université J. Rech. C.N.R.S N° 57 p 265 , 1961

9. O. KAMADA - Solar Energy , 9 , N° 1 , p 39 , 1965

10. F. TROMBE , M. FOEX et Mlle LA BLANCHETAIX Applications thermiques de l'énergie solaire dans le domaine de la recherche et de l'industrie , Coll Int. C.N.R.S N° LXXXV , P 175 , 1961

11. B.V. TARNIJEVSKI , A.D. ROZGOROV et I.G. SAVTCHENKO Geliotekhnika , N° 3 , p 31 1965

12. H. HISADA , H. MII et Coll , Solar Energy , 1, N° 4 p 14, 1957

13. M.D. YOUGADEV, A.Y. BACHNIAK, Y.E. NETCHEAV Geliotekhnika N° 1 p 31 , 1965

14. V.B. VEINBERG, G.Y. KONAEVA et D.K. SATTAROV Geliotekhnika , N°2 p 2, 1965

15. H.H. BLAU. Proceedings of an International Symposium on High temperature Technology Mc Graw Hill- Stanford Research Institute 1960 , p 45

16. T.S. LAZLO , Solar Energy , 1, N° 2-3, p 78, 1957 ; 6, N° 2, p 69, 1962

17. R. GARDON , Rev. Sci. Inst, 24 , p 366 , 1953

18. E. SCHULTS , R. POPLAWSKY et H. BOHM , Rev. Sci. Inst. 34, N° 2 p 168 , 1963

19. R. ZAKHIDOV et D. TEPLIAKOV Geliotekhnika , N° 2 p 15 , 1965

20. A. MOUMOUNI Int. Journ. Heat and Mass transfer .....

21. A. MOUMOUNI, C.R. Acad. Sci. 263 série B p 5 , 1966

22. R. APARISSI , V.A. BAUM et D. TEPLIAKOV . Les applications thermiques de l'énergie solaire dans le domaine de la recherche et de l'industrie , Loc. cit. p. 163

DEUXIEME PARTIE

ETUDE THEORIQUE DE LA REPARTITION DE L'ENERGIE DU RAYONNEMENT CONCENTRE DANS LE PLAN FOCAL D'UN MIROIR PARABOLIQUE A MACRO-GEOMETRIE PARFAITE.

I CONDITIONS ET PARTICULARITES PHYSIQUES ET GEOMETRIQUES DE LA CONCENTRATION DU RAYONNEMENT PAR LES SURFACES REFLECTRICES DES MIROIRS REELS .

Les miroirs concentrent le rayonnement par réflexion sur une ou des surfaces polies mécaniquement et recouvertes d'une mince couche métallique réflectrice (argent , aluminium , stellite etc..) . Dans ces conditions , les facteurs qui contribuent à déterminer le résultat observé se rattachent à la macro-géométrie de la surface réflectrice (éventuellement des surfaces) , à ses propriétés optiques elles mêmes étroitement dépendantes de la qualité optique de la surface (géométrie microstructurale), aux particularités physiques (composition spectrale , répartition spectrale de l'énergie etc..) et géométriques du rayonnement incident découlant de la source émettrice et des conditions de propagation .

A) Macro-géométrie des surfaces réflectrices réelles

Toute surface réflectrice réelle constitue sur le plan géométrique une réalisation approchée d'une surface théorique (idéale) et présente de ce fait des imperfections géométriques dont l'importance dépend du procédé technique de construction utilisé et du soin apporté à sa mise en oeuvre dans les étapes successives de l'exécution . On peut , à l'échelle macroscopique qui est seule envisagée ici et pour des surfaces suffisamment proches des surfaces idéales correspondantes (distance des points de l'ordre du micron) , caractériser le degré de perfection géométrique d'un élément de surface par la valeur de l'angle d'écart entre les deux surfaces (angle de leurs plans tangents ou de leurs normales

en leur point commun) . La valeur moyenne de l'angle d'écart varie entre des limites assez larges tout en restant relativement faible pour les surfaces courantes : quelques degrés pour les surfaces peu précises , quelques dizaines de minutes d'arc pour les surfaces d'assez bonne précision géométrique , quelques minutes d'arc à une fraction de minute pour les surfaces les plus précises.

De façon tout à fait générale , l'existence d'imperfections macro-géométriques contribue à modifier les caractéristiques du rayonnement réfléchi et par voie de conséquence la répartition de l'énergie dans le plan focal par rapport aux résultats qu'on obtiendrait avec une surface idéale . Les effets optiques liés à ces défauts seront d'autant moins importants que l'angle d'écart aura une valeur plus faible et deviennent pratiquement négligeables dès que l'angle d'écart devient lui-même négligeable devant l'ouverture finie et non nulle du pinceau élémentaire incident (conséquence de l'étendue des sources réelles de rayonnement) . En particulier, pour les miroirs paraboliques précis (type projecteur de D.C.A) il en sera ainsi du fait que la valeur maximum de l'angle d'écart est alors de l'ordre de la minute d'arc celle du diamètre apparent des sources habituelles (soleil , lune , arc électrique au foyer d'un miroir auxiliaire) variant entre $\frac{1}{2}^{\circ}$ et 2 à 3° .

En ce qui concerne la loi de distribution des imperfections géométriques de la surface l'analyse des procédés technologiques de réalisation conduit à lui attribuer un caractère statistique . On notera cependant les deux particularités suivantes : d'une part les écarts géométriques entre les surfaces réelles et idéales sont compris entre des limites définies , d'autre part ils varient en fonction de la courbure à réaliser aux points de la surface où ils sont observés . Le traitement théorique du cas d'un miroir de précision quelconque nécessitera donc une formulation mathématique adéquate de la loi de distribution traduisant les trois aspects qui viennent d'être indiqués .

B) Propriétés optiques des surfaces réflectrices réelles

Sur le plan de ses propriétés optiques , une surface réflectrice réelle peut être caractérisée par son indicatrice de réflexion , son facteur d'absorption , les effets de polarisation pour toute radiation monochromatique incidente , les caractères de la réflexion et de l'absorption jouant le rôle essentiel dans la détermination de l'énergie du rayonnement réfléchi et de la distribution de cette dernière . S'appuyant sur l'analyse théorique[1] de la constitution des surfaces réflectrices réelles et sur les observations expérimentales[2,3] effectuées par différentes méthodes (microphotographie , profilogrammes , mesures interférentielles) on peut distinguer les propriétés optiques propres à la couche métallique réflectrice et celles liées à la micro-structure de la surface polie jouant le rôle de support .

1°) Compte tenue de l'ordre de grandeur des dimensions des particules métalliques de la couche réflectrice (quelques Angstrom) on peut admettre une réflexion idéale (suivant les lois de Descartes) en ce qui concerne l'action intrinsèque de la couche réflectrice .

2°) L'existence à l'échelle microscopique , d'un relief pour la surface support (succession de creux , bosses et plages planes dont les dimensions latérales varient de quelques microns à des dizaines voire des centaines de micron , et la profondeur d'une dizaine d'Angstrom à quelques microns) conduit à envisager la "réflexion" sur une telle surface en termes de diffraction par les grains de relief . Il s'ensuit alors un accroissement qui peut être relativement important de l'ouverture angulaire du pinceau élémentaire après "réflexion" sur un élément de surface , d'où l'interprétation physique des imperfections optiques de la surface du miroir .

Dans le cas d'une couche métallique réflectrice déposée sur la face arrière d'une lame transparente (verre) ou proté-

gée par une épaisseur de dépot transparent (oxydation anodique de l'aluminium) on doit en toute rigueur superposer les effets de trois diffractions :

a) une première par réflexion sur le relief de la surface transparente ou du dépot protecteur .

b) une seconde par réflexion sur le support de la couche métallique réflectrice après transmission à travers la lame transparente .

c) une troisième par transmission après la traversée en sens inverse de la lame transparente .

Les ordres de grandeur de l'épaisseur du verre (1 à 2cm) et de la couche d'alumine (10 à 40 microns) , la petitesse des angles de diffraction, les caractéristiques microstructurales des surfaces de métaux polis (grains de relief de 20 à 40 microns) permettent selon le cas , de négliger l'effet de la 2ème diffraction (cas de miroirs en verre argenté face arrière) , ou des première et troisième (miroirs d'aluminium oxydé anodiquement) .

On devra donc tenir compte , indépendemment de toute imperfection géométrique macroscopique de la surface du miroir , des imperfections optiques découlant de la micro-structure des surfaces et dont l'analyse précédente montre l'origine tout à fait distincte , malgré la corrélation inévitable qui existe toujours dans la pratique entre la valeur moyenne de l'angle d'écart et celle des dimensions des grains de relief du fait qu'elles découlent toutes deux des mêmes opérations de polissage .

c) Particularités propres aux sources habituelles de rayonnement .

En dehors des effets dûs aux caractéristiques géométriques et optiques de la surface réflectrice , les phénomènes observés dans le plan focal seront en partie déterminés par la structure (composition spectrale , répartition spectrale de l'énergie) du rayonnement incident et sa géométrie .

1°) Les sources usuelles de rayonnement (soleil , lune , arc au foyer d'un miroir parabolique auxiliaire) correspondent à un diamètre apparent fini . L'astigmatisme du miroir parabolique pour tout point à l'infini en dehors de la direction de son axe contribuera donc , comme nous l'avons déjà signalé , à une redistribution de l'énergie dans le plan focal .

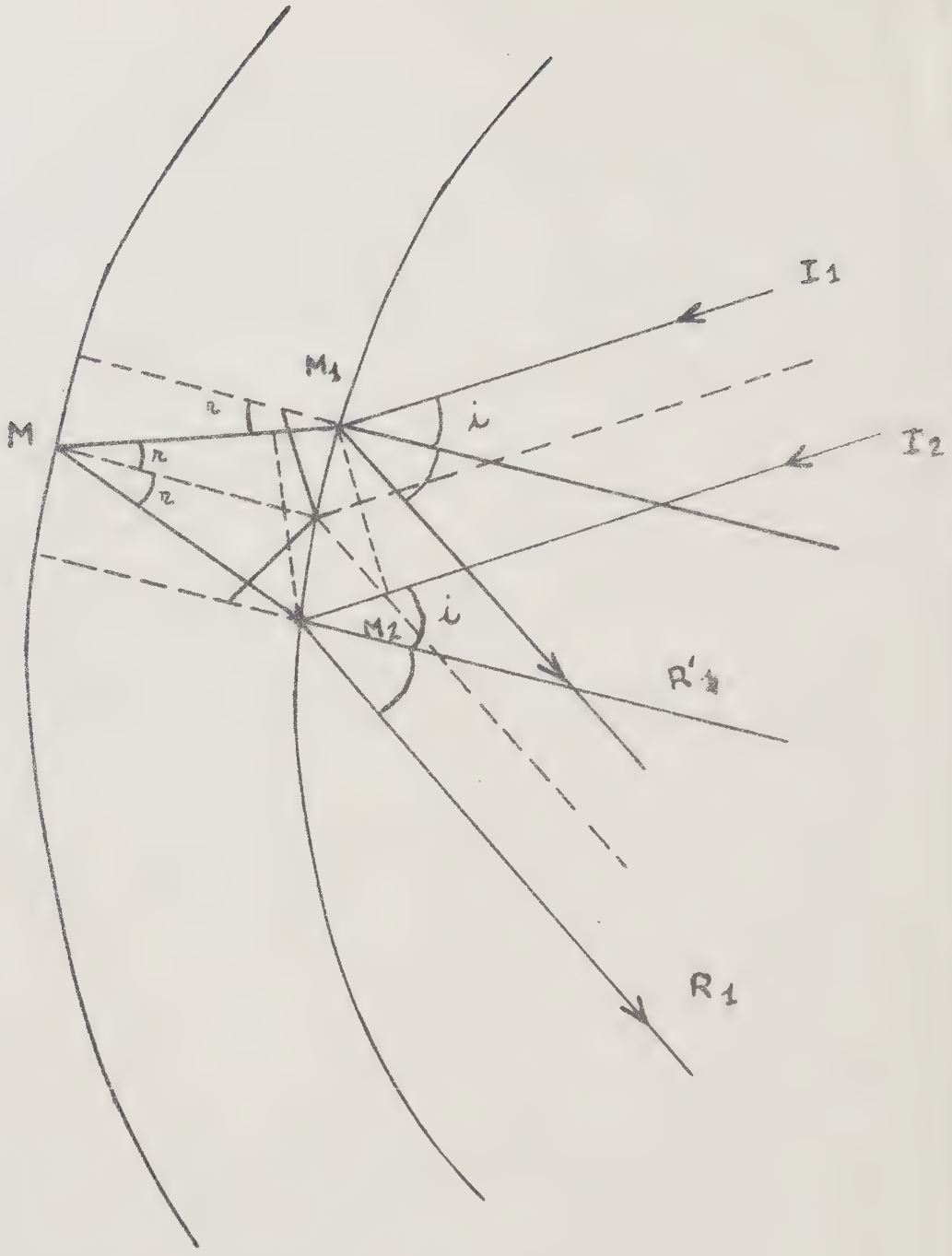
2°) En ce qui concerne les caractéristiques énergétiques des sources de rayonnement , on peut admettre la validité de la Loi de Lambert . Dans le cas du soleil cette approximation bien que rigoureusement inexacte en raison de l'assombrissement du "disque solaire" sur les bords est cependant justifiée par la faible importance de ce phénomène pour les radiations transportant la quasi-totalité de l'énergie du rayonnement solaire (radiations visibles et infra rouges) d'après les données de G. ABBOT[4].

3°) Pour ce qui est de la composition spectrale du rayonnement incident et de la répartition spectrale correspondante de l'énergie , on devra partir chaque fois des données relatives à la source utilisée .

II. HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES ET SCHEMA GENERAL DE LA CONDUITE DES CALCULS NOTATIONS.

A) Sur une équivalence entre le cas d'une réflexion simple et celui d'un réflexion précédée et suivie d'une transmission à travers une lame transparente (miroirs à surface réflectrice métallisée face avant et miroirs à surface réflectrice métallisée face arrière) .

On peut établir une équivalence complète (tant du point de vue optique que sous l'angle énergétique) entre une réflexion sur une couche métallique précédée d'une lame transparente et une réflexion directe sur une couche métallique réflectrice , dans la mesure où l'on peut négliger les effets de la diffraction


I1
M1
M
r
i
I2
r
M2
i
R'1
R1

sur la surface support de la couche métallique réflectrice du premier cas .

Soit en effet (fig. I) un miroir à lame transparente (face avant) métallisée (face arrière) . A l'incident I_1M_1 correspond par réflexion idéale sur la lame transparente (face avant) l'émergent M_1R_1 ; le rayon transmis émerge après réflexion sur la couche métallique en M_2R_2 . Le calcul donne $M_1M_2 = 2e\ tg\ r$, ce qui montre qu'en règle générale et pour les épaisseurs usuelles des miroirs ($e \sim cm$) dès que $r > \frac{1}{10}$ rad $M_1M_2 \sim mm$ donc les points M_1 et M_2 ne se trouvent pas sur un même grain de relief , même dans le cas des surfaces les plus soignées (la dimension latérale moyenne des grains est alors de l'ordre du 1/10 mm) . Par ailleurs le retard optique entre M_1R_1 et M_2R_2 est $\Delta = \frac{2ne}{\cos r} + \varepsilon$, et l'on peut toujours choisir , pour des points tels que M_1 et M_2 , un rayon incident I_2M_2 tel que les rayons provenant de la réflexion de ce dernier sur la face avant et de la réfraction du rayon transmis en M_1 coincident dans l'espace et le temps : il suffit que I_2M_2 présente sur I_1R_1 un retard optique

$$\delta = \frac{2ne}{\cos r} + \varepsilon - (2ne \cos r + \varepsilon) = 2ne \frac{\sin^2 r}{\cos r} = 2e\ tg\ r \sin i$$

Une telle correspondance pourra être établie pour différentes valeurs de l'angle d'incidence i et dans ces conditions les rayons confondus simultanément dans le temps suivant M_2R_2 transportent une énergie égale à la somme des énergies provenant de la réflexion de I_2M_2 sur la face avant et de la transmission par la lame transparente du rayon correspondant à I_1M_1 : on a bien équivalence entre une réflexion unique en M_2 et l'ensemble des réflexions et transmissions en M_1 et M_2 , le facteur de réflexion de la surface unique équivalente (face avant) étant déterminé par l'absorption de la lame transparente et de la couche réflectrice (face arrière) .

Pour différentes valeurs de l'angle d'incidence en M_1

on obtiendra différents points M_2 . Pour une variation **di** on peut écrire

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr \quad d(M_1M_2) = 2e \, d(\mathrm{tg}r) = \frac{2e \, dr}{\cos^2 r} \, .$$

$$d(M_1M_2) = \frac{2e}{\cos^2 r} \cdot \frac{\cos i \, di}{n \cos r} = \frac{2e \cos i \, di}{n \cos^3 r}$$

pour $di = 16' = 0{,}46 \; 10^{-2}$ rad $\quad d(M_1M_2) \simeq \frac{10^{-2} \, e}{1{,}5}$

soit

pour $e \sim 1$ cm $\quad d(M_1M_2) \simeq 0{,}067$ mm

ce qui montre que pour les épaisseurs courantes de la lame transparente les points M_1 et M_2 se situent sur un même grain pour des miroirs très précis et sur des grains différents pour des miroirs moins précis . De plus les rayons équivalents émergents sur un grain de relief présenteront , du fait de la variation de l'incidence des rayons "inverses" correspondants (tels que I_1M_1) des différences de phase arbitraires auxquelles pourra éventuellement contribuer la variation d'épaisseur de la lame transparente .

Au total , il y a bien équivalence entre une réflexion sur face avant + transmission sur cette même face après traversée de la lame transparente , réflexion sur la couche métallique et nouvelle traversée de la lame transparente . Du point de vue du traitement théorique on pourra donc s'en tenir au seul cas d'une "réflexion" simple ce qui revient à poser le problème en termes de diffraction par réflexion .

B) Hypothèses simplificatrices .

Un traitement théorique rigoureux entrainerait des difficultés et des complications sérieuses sans contre partie assurée. Aussi nous ferons les hypothèses simplificatrices suivantes , dont la validité , dans le cas de miroirs précis est justifiée par les considérations développées au chapitre précédent :

1º) Nous admettrons que les grains de relief de la surface réflectrice sont de dimensions uniformes et nous les

assimilerons à des cercles de rayon a; la validité d'une telle approximation est établie par les résultats expérimentaux relatifs aux surfaces optiques précises et se justifie théoriquement par l'analyse du processus de polissage mécanique .

En toute rigueur la dimension des grains oscille autour d'une valeur moyenne , la distribution des écarts étant du type Gauss-Laplace .

2º) Nous considérerons que la répartition des grains sur la surface est uniforme , de densité N grains par unité de surface . Cette hypothèse est manifestement consistante avec celle d'une grande précision du miroir , avec le mécanisme du polissage et avec l'hypothèse précédente . En fait la densité des grains , de relief varie autour d'une valeur moyenne , et , les écarts doivent obéir ici encore à une loi du type Gauss-Laplace .

3º) Le miroir étant supposé précis , on a $\alpha \ll \psi_0 = 16'$ en sorte que l'incidence de α peut être négligée devant celles du diamètre apparent de la source et de la diffraction par les grains de relief , ce qui revient à assimiler la forme macroscopique du miroir à celle de la surface idéale correspondante .

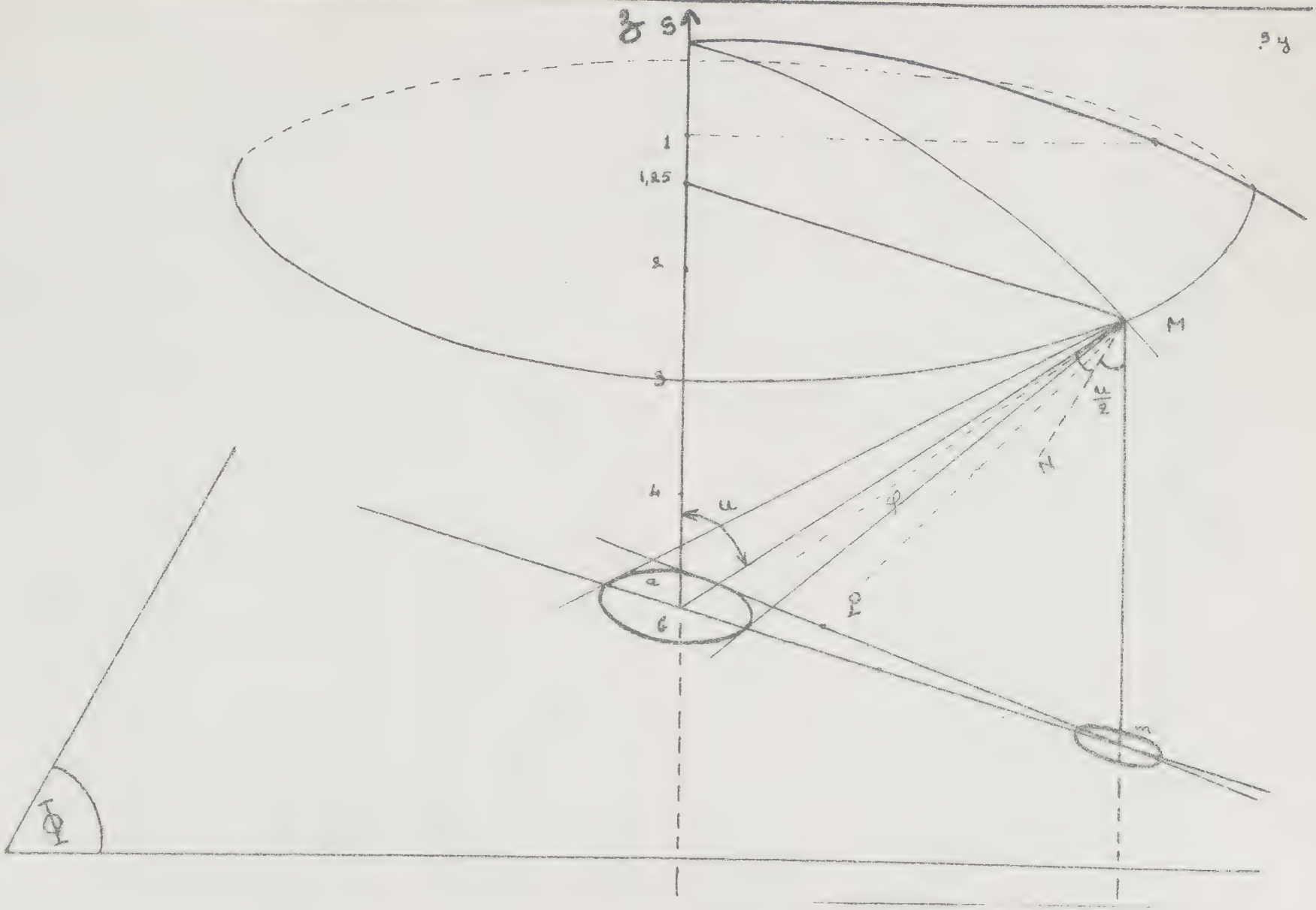
4º) On ne tiendra pas compte , dans le cas du rayonnement solaire , du phénomène d'assombrissement du disque solaire sur les bords , conformément aux observations du chapitre précédent .

Etant donnée l'inexistence de toute relation entre les phases des "ondes équivalentes" diffractées par un élément de surface , l'intensité diffractée , pour une radiation donnée , s'obtiendra par la sommation des intensités relatives aux différents grains et aux différentes incidences .

C) Schéma général de la conduite des calculs

1º) Notations :

Dans tout ce qui suivra , les notations seront les suivantes (voir fig. 2)


S
1
1,25
2
3
4
M
u
u/2
N
φ
a
b
n
Φ

S sommet du paraboloïde

Φ foyer géométrique du paraboloïde (origine des axes de coordonnées)

Φ, x , y , z axes trirectangulaires : Φz suivant l'axe de révolution du miroir , Φx , Φy orthogonaux dans le plan normal en Φ à l'axe du miroir (plan focal)

M point courant du paraboloïde de coordonnées sphériques $\rho = |\overrightarrow{\Phi M}|$, φ , $u = \overrightarrow{\Phi S}$, $\overrightarrow{\Phi M} = \overrightarrow{\Phi Z}$, $\overrightarrow{\Phi M}$ et de coordonnées cartésiennes $x = \rho \sin u \cos \varphi$; $Z = \rho \cos u$; $y = \rho \sin u \sin \varphi$

P point courant du point focal de coordonnées polaires $r = |\overrightarrow{\Phi P}|$, $\ominus = \overrightarrow{\Phi x}$, $\overrightarrow{\Phi P}$

F point courant de l'ellipse $E_{u\varphi}$ intersection du plan focal avec le pinceau élémentaire réfléchi en M (u , φ) selon les lois de Descartes , de coordonnées polaires $\ell = |\overrightarrow{\Phi F}|$, $\theta = \overrightarrow{\Phi x}\,\overrightarrow{\Phi F}$

i angle d'incidence des rayons solaires moyens au point M

i' angle de diffraction correspondant à i

φ_o demi-diamètre apparent de la source

φ écart angulaire entre un rayon diffracté en M et le rayon réfléchi suivant les lois de Descartes

λ longueur d'onde de radiations monochromatiques d'une bande élémentaire $d\lambda$ du spectre .

a rayon moyen des grains de relief de la surface

N nombre de grains par unité de surface

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ module du vecteur d'onde correspondant aux radiations de la bande λ , $\lambda + d\lambda$

$m = k\, a\, (\sin i + \sin i')$

p paramètre du paraboloïde $p = 2f$

R rayon du parallèle passant par M du paraboloïde

ds élément d'arc de la parabole génératrice d'équation polaire $\rho = \frac{p}{1+\cos u}$: $ds = \frac{2p}{(1+\cos u)^2} \cos \frac{u}{2}\, du$; U_m demi-ouverture angulaire du paraboloïde

J_n fonction de Bessel d'indice n

$d\Omega$ angle solide élémentaire

$d\sigma = \pi a^2$ surface d'un grain de relief

dS élément de surface du point focal

K_λ facteur de proportionalité au flux énergétique spectral des radiations de longueur d'onde λ

$I_\lambda(r)$ densité d'énergie , $d^2I_\lambda(r)$ densité d'énergie élémentaire pour les radiations de longueurs d'onde comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$ au point P du plan focal

v angle de la normale en M au paraboloïde avec MP

a_u , b_u , ω respectivement demi grand axe , demi petit axe et centre de l'ellipse $E_{u\psi}$:

$$a_u = \frac{\rho \sin\varphi_o}{\cos u} \quad ;$$

$$b_u = \rho \sin \varphi_o \quad ;$$

$$\omega\Phi = \frac{\rho \sin^2\varphi_o \sin u}{\cos^2 u - \sin^2\varphi_o} = \frac{p \sin^2\varphi_o \sin u}{(1+\cos u)(\cos^2 u - \sin^2\varphi_o)} \simeq p \sin^2\varphi_o \operatorname{tg} \frac{u}{2}(1+\operatorname{tg}^2 u)$$

2º) Schéma général de la conduite des calculs

Le schéma adopté pour la conduite des calculs est basé sur les remarques et considérations suivantes :

a) L'énergie du rayonnement diffracté par un élément de surface du miroir et provenant d'un pinceau élémentaire incident admet une symétrie de révolution autour de la direction correspondant au pinceau élémentaire réfléchi suivant les lois de Descartes .

b) La répartition de l'énergie dans le plan focal résulte de la supperposition des distributions précédentes de l'énergie du rayonnement diffracté en différents points (éléments de surface) du miroir et pour des pinceaux élémentaires de directions incidentes contenues à l'intérieur du cône de demi angle

au sommet φ_o et d'axes la direction des rayons moyens . Ce fait et la symétrie de révolution du problème géométrique entraînent une symétrie de révolution pour la répartition de l'énergie dans le plan focal .

c) Se laissant guider par la symétrie de révolution du problème , on conduira les calculs à partir d'éléments de surface du miroir présentant également la même symétrie .

d) La première étape du calcul consistera en l'étude de la répartition de l'énergie dans le plan focal relative au rayonnement réfléchi suivant les lois de Descartes .

3º) Expression générale de l'intensité du rayonnement diffracté par un élément de surface du miroir en un point du plan focal pour des radiations de longueur d'onde comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$

a) Un résultat classique dû à LANDAU et LIFCHITZ[5] permet d'écrire l'expression de l'intensité diffractée par réflexion dans l'angle solide élémentaire à des radiations de longueur d'onde comprise entre λ et $\lambda + d\lambda$ sous la forme

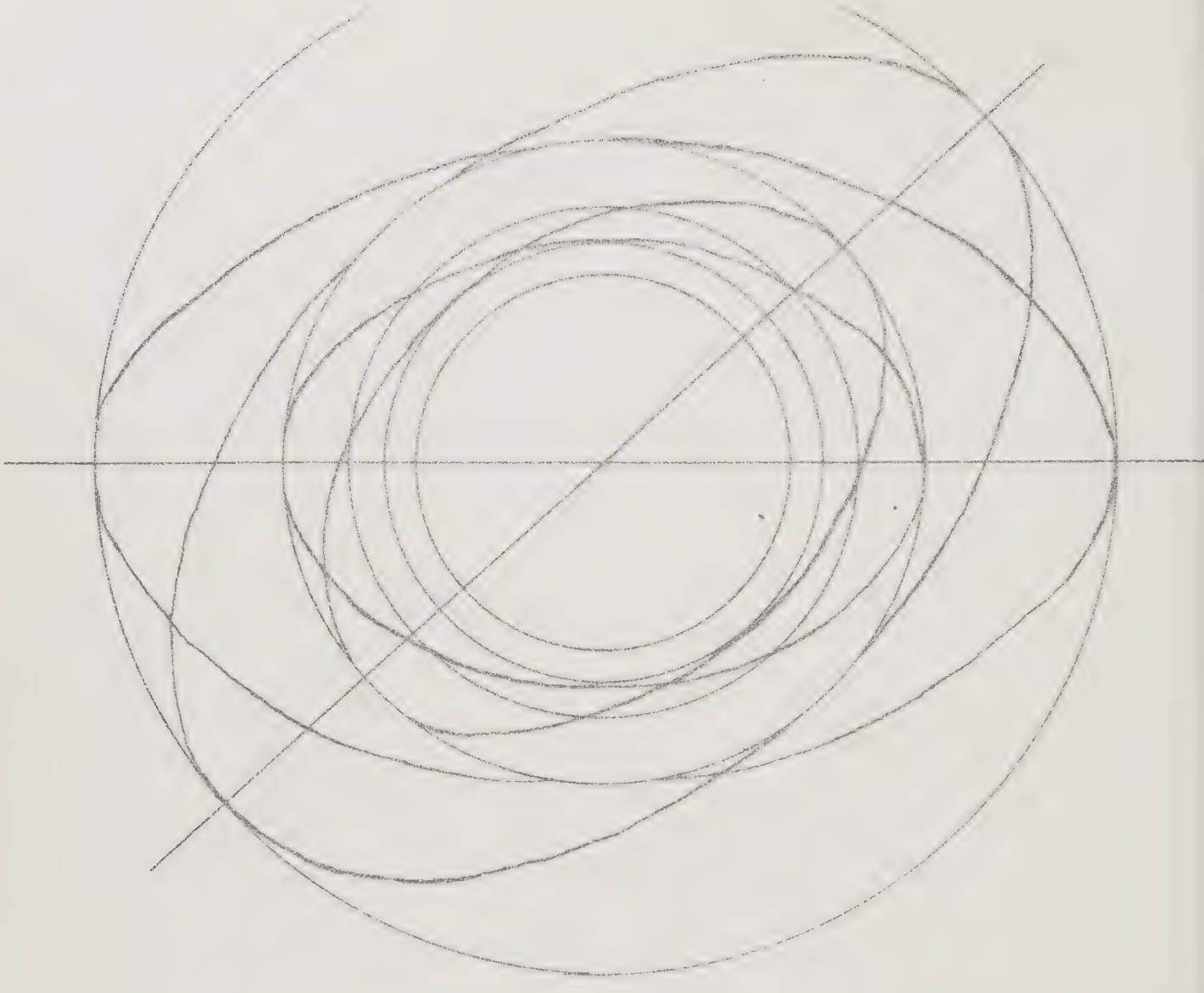
$$d^2\mathcal{J}_{\lambda} = 4\ K_{\lambda} \frac{J_1^2(m)}{m^2}\ A\ d\lambda\ d\Omega\ \cos u\ \cos u'$$

dans l'hypothèse d'angles diffraction petits (dans le cas actuel , il se mesurent à partir de la direction correspondant à la réflexion selon les lois de Descartes) .

$m = ka(\sin u + \sin u')$; $d\Omega = \frac{dS \cos v}{r^2}$; K_{λ} est une constante proportionnelle à l'intensité spectrale du rayonnement incident . On en déduit

$$d^2 I_{\lambda}^{*} = \frac{d^2\mathcal{J}_{\lambda}}{dS} = 4\ K_{\lambda} \frac{J_1^2(m)}{m^2}\ A\ d\lambda\ \frac{\cos u\ \cos v\ \cos u'}{r^2}$$

Dans le cas d'un grain de relief appartenant à un élément de la



surface du miroir en M $u = i$; $u' = -i \pm \varphi$ la déviation angulaire φ étant faible par hypothèse .

$$d^2 I_\lambda^* = 4 K_\lambda \frac{J_1^2(m)}{m^2} A \, d\lambda \frac{\cos^2 i \cos v}{r^2}$$

b) Pour un élément de surface $d\sigma$ du miroir comportant un nombre $dn = N \, d\sigma$ de grains de relief on aura :

$$d^2 I_\lambda = 4K_\lambda \frac{J_1^2(m)}{m^2} NA \, d\lambda \, d\sigma \frac{\cos^2 i \cos v}{r^2} = 4 \frac{J_1^2(m)}{m^2} K_\lambda N \pi a^2 d\lambda d\sigma \frac{\cos^2 i \cos v}{r^2}$$

4º) Etude de l'image focale de l'approximation de Gauss (réflexion idéale sur la surface du miroir) , structure symétrie et loi correspondante de répartition de l'énergie .

a) Le pinceau élémentaire incident en M (demi-ouverture angulaire φ_o) réfléchi suivant les lois de Descartes donne dans le plan focal du miroir une zone éclairée limitée par une ellipse $E_{u\varphi}$ de demi-axes

$$a_u = \frac{\rho \sin \varphi_o \cos \varphi_o \cos u}{\cos^2 u - \sin^2 \varphi_o}$$

$b_u = \rho \sin \varphi_o$ et de centre défini par $\omega\Phi = \rho \dfrac{\sin^2 \varphi_o \sin u}{\cos^2 u - \sin^2 \varphi_o}$.

L'ordre de grandeur de φ_o (16' pour le soleil et la pleine lune) et de l'ouverture maximum du miroir ($Um \sim 60º$) permettent d'écrire

$$a_u \simeq \frac{\rho \sin \varphi_o}{\cos u} = \frac{p \sin \varphi_o}{(1+\cos u) \cos u}$$

$$b_u = \frac{p \sin \varphi_o}{1+\cos u} \; ; \quad \omega\Phi \simeq 0$$

quand le point M de la surface du miroir décrit un parallèle du paraboloïde , l'ellipse $E_{u\varphi}$ tourne autour du foyer en restant égale à elle-même : un élément de surface du miroir limité par deux parallèles infiniment voisins du paraboloïde conduit à

une zone éclairée à symétrie de révolution autour du foyer géométrique , l'éclairement étant uniforme à l'intérieur d'un cercle de rayon b_u et décroissant dans le couronne limitée par les cercles de rayons b_u et a_u .

b) Des considérations de géométrie élémentaire permettent d'établir que l'éclairement produit en un point du plan focal situé à la distance r du foyer par un élément de surface à symétrie de révolution au tour de l'axe du miroir peut s'écrire sous la forme :

1º) $d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_o$ pour $o \leqslant r \leqslant b_u$

2º) $d\mathcal{E} = \frac{2}{\pi} d\mathcal{E}_o \text{Arc sin}\left[\frac{\text{cotg } u}{r}\sqrt{\frac{p^2\sin^2\varphi_o}{(1+\cos u)^2\cos^2 u} - r^2}\right] x\Psi(r-b_u)x\Psi(a_u - r)$

pour $b_u \leqslant r \leqslant a_u$

$d\mathcal{E}_o$ est proportionnel à l'aire $d\sigma$ de l'élément de surface et à l'énergie du rayonnement incident ; $\Psi(t)$ désigne l'échelon unité de Heaviside . Le calcul permet de montrer que $d\mathcal{E}_o$ est en définitive proportionnel à $\sin 2u\,du$ (du étant l'ouverture angulaire élémentaire correspondant à la zone élémentaire considérée) .

On peut alors écrire , à un facteur de proportionnalité près qui reste invariant quand l'élément de surface varie

$$d\mathcal{J}_\lambda = d\lambda \int_o^{U_m} \sin 2u\,du \quad \text{pour } o \leqslant r \leqslant a_o = b_o = \frac{1}{2} p \sin\varphi_o$$

$$d\mathcal{J}_\lambda = d\lambda \left\{ \int_o^{U_m} \sin 2u\,du\,\Psi(b_u - r) + \frac{2}{\pi}\int_o^{U_m} \sin 2u\,du \text{ Arc sin}\left[\frac{\text{cotg}u}{r}\sqrt{\frac{p^2\sin^2\varphi_o}{(1+\cos u)\cos u} - r^2}\right] \Psi(r-b_u)\Psi(a_u - r) \right.$$

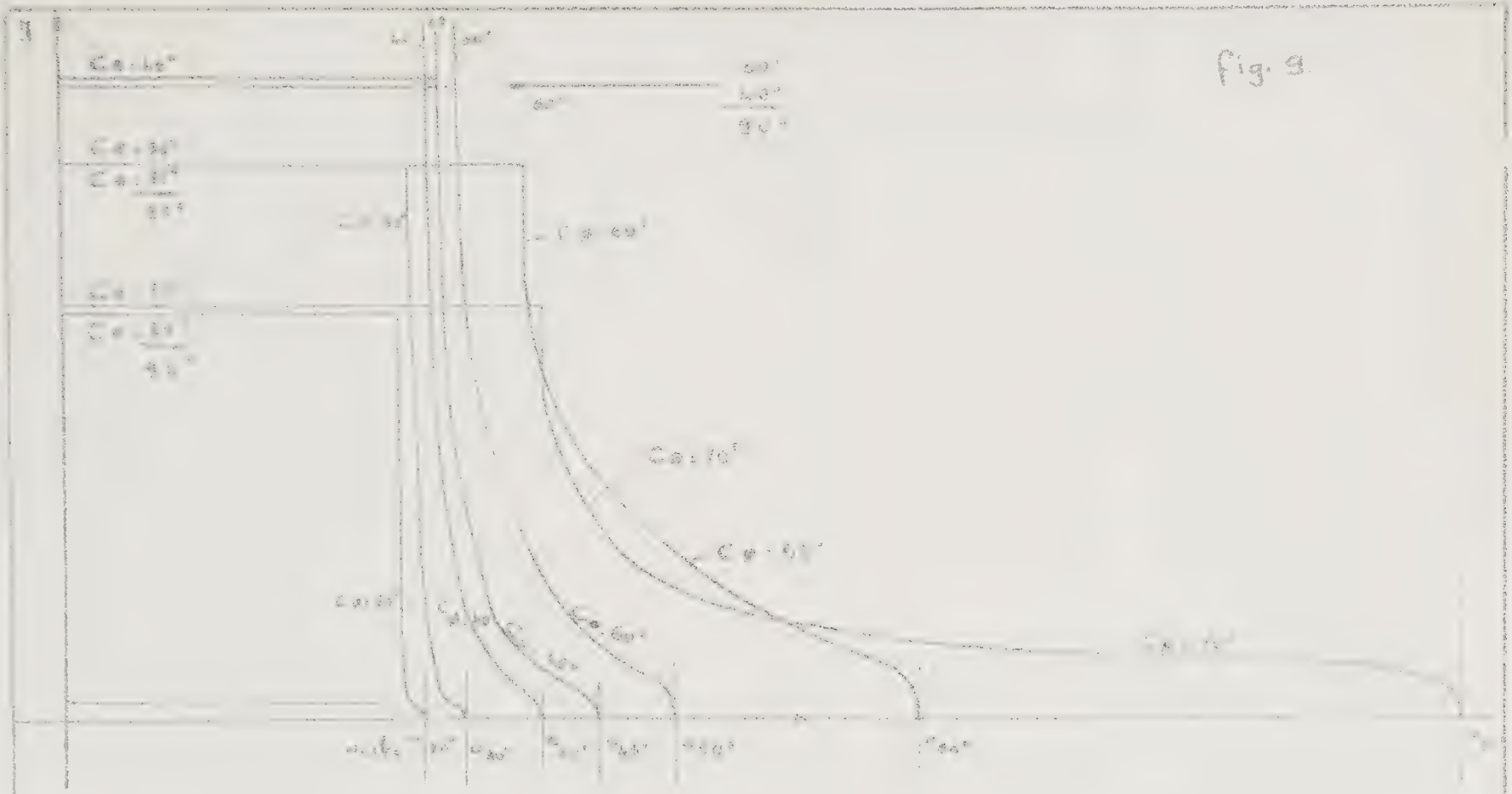
ou encore

$$d\mathcal{J}_\lambda = d\lambda \left\{ \int_o^{U_r} \sin 2u\,du + \int_{U_r}^{U_m} \frac{2}{\pi}\sin 2u \text{ Arc sin}\left[\frac{\text{cotg}u}{r}\sqrt{\frac{p^2\sin^2\varphi_o}{(1+\cos u)\cos u} - r^2}\right]\Psi(a_u - r)\Psi(r-b_u)du \right\}$$

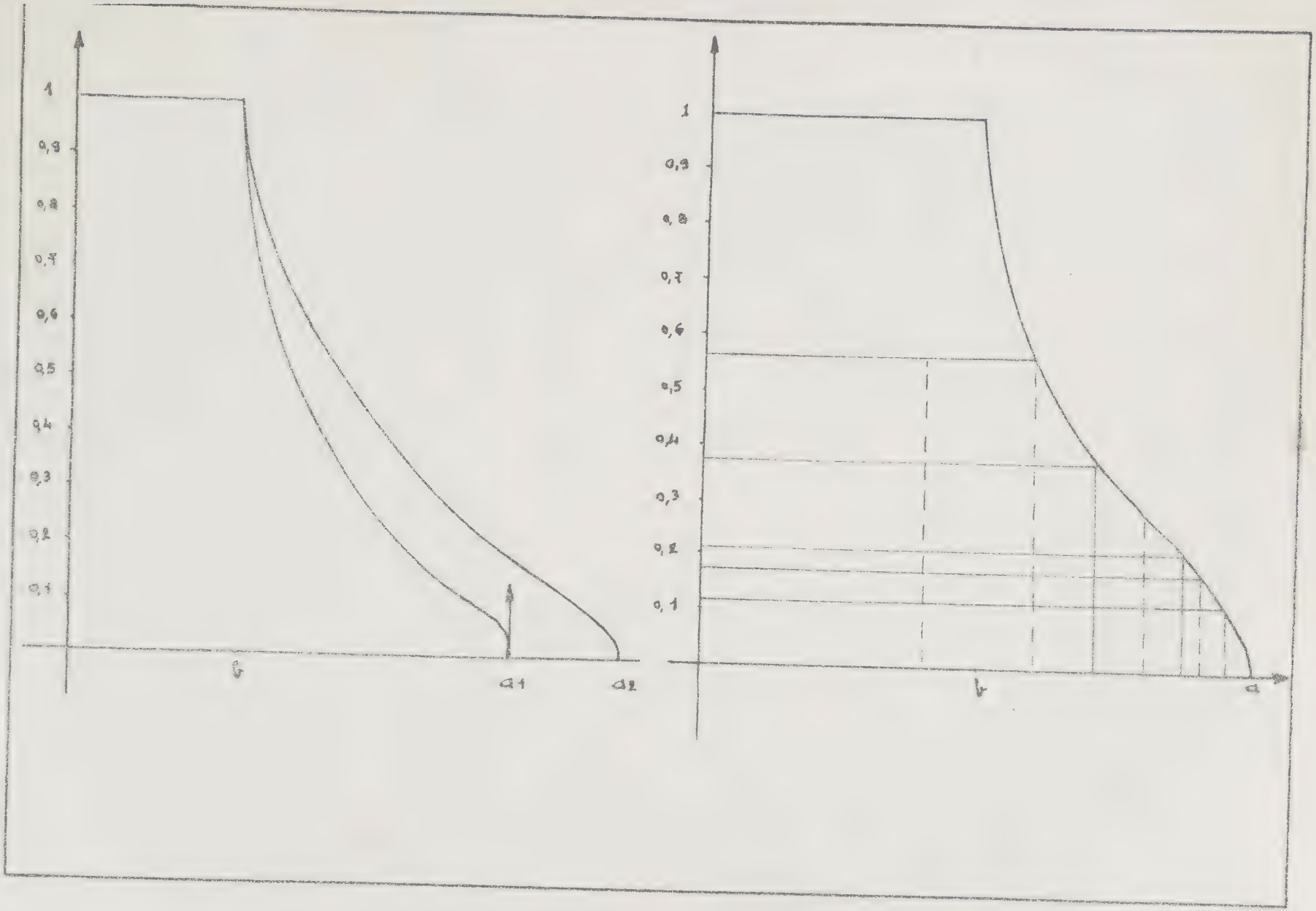
pour

$$a_o = b_o \leqslant r \leqslant a_{U_m} = \frac{p\sin\varphi_o}{(1+\cos U_m)\cos U_m}$$

Fig. 9.



θ	0°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°
sin θ	0	0,643	0,866	0,985	1	0,985	0,866	0,643
a0/a0	1	1,11	1,24	1,48	1,66	1,89	2,66	4,35
r0/a0	1	1,04	1,07	1,12	1,17	1,21	1,33	1,62


1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
b
a1
a2
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
b
a

L'angle U_r est défini par $r = b_{U_r} = \frac{p \sin\varphi_o}{1+\cos U_r}$

soit $\cos\frac{U_r}{2} = \sqrt{\frac{p \sin\varphi_o}{2\,r}}$

ou $U_r = 2 \operatorname{Arc}\cos\sqrt{\frac{p \sin\varphi_o}{2\,r}}$.

La variation des flux élémentaires correspondant à différents éléments de surface de même ouverture angulaire du est représentée , en fonction de la distance du foyer au point d'observation dans le plan focal , par les courbes (C_u) de la figure 4 . La courbe de la figure 5 illustre la variation du flux total (ensemble des flux élémentaires) . Le tracé des tangentes aux points remarquables des courbes respectives ($r = b_u$, $r = a_u$ pour les courbes (C_u) , $r = a_o = b_o$, $r = a_m$ pour la courbe C) est conforme aux valeurs calculées des dérivées des fonctions correspondantes . Dans les deux cas il ne s'agit que des radiations de longueur d'onde compris entre λ et $\lambda + d\lambda$.

Comme on pouvait s'y attendre , on observe une analogie frappante entre les courbes précédentes et celles obtenues par F. CABANNES et LE PHAT VINH .

III . EXPRESSION EXPLICITE DE LA DENSITE D'ENERGIE EN UN POINT DU PLAN FOCAL

A) Expression formelle de la densité d'énergie en un point du plan focal :

1º) Calculs et résultats préliminaires

a) Le calcul de m , compte tenu de la petitesse des angles φ_o (demi-ouverture du pinceau incident) et φ (déviation angulaire des rayons diffractés par rapport à la direction des rayons réfléchis suivant les lois de Descartes) , conduit à l'expression :

$$m = k\,a\cos\frac{u}{2}\sin\varphi = 2\pi\frac{a}{\lambda}\cos\frac{u}{2}\sin\varphi$$

b) Prenant en considération la symétrie de révolution de la zone éclairée dans le plan focal par l'ensemble des pinceaux élémentaires réfléchis idéalement en différents points d'un élément de surface du miroir compris entre deux parallèles infiniment voisins , on remarque que le calcul de l'intensité diffractée en un point P du plan focal et provenant des différents éléments de surface de la zone peut se conduire de façon quelconque sans que le résultat en soit changé . En particulier , on peut effectuer ce calcul en associant à chaque secteur élémentaire d'ouverture $d\psi$ et d'angle polaire ψ de la tache focale l'élément de surface défini autour du point de la zone à symétrie de révolution ayant pour coordonnées ρ, u et ψ . Cet artifice , en permettant de respecter la symétrie de révolution du problème permet un calcul commode et plus simple . On doit alors prendre $\theta = \psi$ ce qui donne :

$$\sin\varphi = \frac{1}{\rho}\left[r^2(1-\sin^2 u\cos^2\psi)+\ell^2\cos^2 u - 2\ell r\cos^2 u\cos\psi\right]^{\frac{1}{2}}$$

c) A partir de l'expression du flux diffracté en un point du plan focal par un élément de surface du miroir et utilisant l'artifice de calcul décrit ci-dessus , on obtient pour la valeur de la densité d'énergie du rayonnement diffracté relatif à un élément de la tâche focale (optique géométrique) défini par les coordonnées ψ , $\psi + d\psi$, ℓ , $\ell + d\ell$ l'expression :

$$d^4 I_\lambda(r) = \frac{4\, J_1^2\left[m(r,\ell,u,\psi)\right]}{m^2(r,\ell,u,\psi)}\, C_\lambda\, d\mathcal{J}_\lambda(\ell)\,\ell\, d\ell\cos\frac{u}{2}$$

La sommation étendue au secteur d'ouverture $d\psi$ donne

$$d^2 I_\lambda(r) = \int_0^{a\omega} \frac{4\, J_1^2(m)}{m^2}\, C_\lambda\, d\mathcal{J}_\lambda(\ell)\,\ell\, d\ell\cos\frac{u}{2}$$

En explicitant la valeur de $d\mathcal{J}_\lambda(\ell)$ d'après les résultats des calculs du chapitre précédent on obtient :

$$^3I_\lambda(r)=2\pi K_\lambda d\lambda N\left\{\int_0^{b_u}\sin u\cos u\cos\frac{u}{2}\,du\,d\psi\cdot\frac{4\,J_1^2(m)}{m^2}\ell\,d\ell\;+\right.$$
$$\left.+\int_0^{a_u}\sin u\cos u\cos\frac{u}{2}\,du\,d\psi\cdot\frac{4\,J_1^2(m)}{m^2}\ell\,d\ell\,\frac{2}{\pi}\mathrm{Arc}\,\sin\left[\frac{b_u}{C_u r}\sqrt{a_u^2-r^2}\right]\times\right\}$$
$$\times\,\psi(a_u-r)\psi(r-b_u)$$

2º) Expression formelle de la densité d'énergie en un point du plan focal .

a) Pour les radiations de longueur d'onde λ , la sommation par rapport à u et ψ_{b_u} donne :

$$I_\lambda(r)=2\pi K_\lambda N\,d\lambda\left\{\int_0^{U_m}\sin u\cos u\cos\frac{u}{2}\,du\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{b_u}\frac{4\,J_1^2(m)}{m^2}\ell\,d\ell\;+\right.$$
$$\left.+\int_0^{U_m}\sin u\cos u\cos\frac{u}{2}\,du\int_0^{2\pi}d\psi\int_{b_u}^{a_u}4\cdot\frac{J_1^2(m)}{m^2}\,\mathrm{Arc}\,\sin\left[\frac{b_u}{C_u\cdot r}\sqrt{a_u^2-r^2}\right]\times\right\}$$
$$\times\,\ell d\ell\times\Psi(a_u-r)\,\Psi(r-b_u)$$

b) La sommation par rapport aux différentes longueurs d'onde du spectre du rayonnement incident donne alors

$$\int_0^\infty dI_\lambda(r)=\int_0^\infty 2\pi K_\lambda N d\lambda\left\{\int_0^{U_m}\sin u\cos u\cos\frac{u}{2}\,du\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{b_u}\frac{4\,J_1^2(m)}{m^2}\ell\,d\ell\;+\right.$$
$$\left.+\int_0^{U_m}\sin u\cos u\cos\frac{u}{2}\,du\int_0^{2\pi}d\psi\,\frac{2}{\pi}\int_{b_u}^{a_u}\mathrm{Arc}\,\sin\left[\frac{b_u}{C_u\cdot r}\sqrt{a_u^2-r^2}\right]\frac{4\,J_1^2(m)}{m^2}\right\}I(\lambda)$$
$$\times\,\ell\,d\ell\cdot\Psi(a_u-r)\,\Psi(r-b_u)$$

On obtient ainsi l'expression formelle de la densité d'énergie en un point du plan focal à partir de laquelle on doit déduire une expression explicite permettant des calculs numériques , ce qui revient à opérer une séparation des variables d'intégration .

B) Expression explicite de la densité d'énergie en un point du plan focal .

1º) Développement de $\frac{4\,J_1^2(m)}{m^2}$ en série de fonctions de Bessel

a) En posant respectivement

$$Z^2 = k^2 a^2 \cos^2 \frac{u}{2} \frac{r^2}{\rho^2} (1 - \sin^2 u \cos^2 \psi) \; ; \; z^2 = k^2 a^2 \cos^2 \frac{u}{2} \frac{\ell^2}{\rho^2}$$

$\cos^2 \chi = \dfrac{\cos^2 u \cos^2 \varphi}{1 - \sin^2 u \cos^2 \psi}$, l'expression de m se traduit sous la forme :

$$m^2 = Z^2 + z^2 - 2Zz\cos\chi$$

b) Utilisant le théorème d'addition de Geigenbauer-Sonine [C(7)(8)] il vient :

$$\frac{J_1(m)}{m} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, C_n^1(\cos\chi)\, \frac{Jn+1(Z)}{Z}\, \frac{Jn+1(z)}{z}$$

avec $C_n^1(x) = \sum_{K=0}^{K \leq \frac{m}{2}} \dfrac{(-1)^K 2^{n-2k} \Gamma(n+1-k)}{(n-2k)!\, k!\, \Gamma(1)}\, n-2k$

$$= \sum_{K=0}^{K \leq \frac{m}{2}} \frac{(-1)\qquad (n-k)!}{(n-2k)\;!\;k\;!}\; n-2k$$

On obtient à partir de ces résultats :

$$\frac{J_1^2(m)}{m^2} = 4 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{mn}$$

$$P_{mn} = (m+1)(n+1) C_m^1(\cos\chi) C_n^1(\cos\chi)\, \frac{Jm+1(Z)}{Z} \cdot \frac{Jn+1(Z)}{Z} \cdot \frac{Jm+1(z)}{z} \cdot \frac{Jn+1(z)}{z}$$

c) Posant $Z = X\sqrt{1+K}$ avec $X = ka \cos\frac{u}{2} \cdot \frac{r}{\rho}$; $K = -\sin^2 u \cos^2 \varphi$ on peut appliquer le développement de Lommel valable pour $|K| < 1$, condition réalisée dans la pratique puisque $U_m < \frac{\pi}{2}$ d'où $\sin^2 u \leq \sin^2 U_m < 1$

$$J_p(X\sqrt{1+K}) = (1+K)^{-\frac{p}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}K\,X)^m}{m\;!} \cdot J_{p-m}(X)$$

d) Utilisant ce développement dans l'expression de P_{mn} on obtient finalement

$$P_{mn} = \begin{cases} (m+1)(n+1)(1+K)^{\frac{-m+n+4}{2}} \; C_m^1(\cos\chi) C_n^1(\cos\chi) \; \frac{J_{m+1}(z)}{z} \cdot \frac{J_{n+1}(z)}{z} \\ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{p'=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}K\,X)^{p+p'}}{p\,!\;p'!} \; \frac{J_{m+1-p}(X)}{X} \cdot \frac{J_{n+1-p'}(X)}{X} \end{cases}$$

On a ainsi réalisé la séparation des variables d'intégration .

2º) Expression explicite de la densité d'énergie en un point du plan focal .

La substitution du développement obtenu pour P_{mn} dans l'expression de $\frac{dI_\lambda^{(m)}(r)}{d\lambda}$ conduit à des expressions explicites pour $\frac{dI_\lambda(r)}{d\lambda}$ et $I(r)$:

$$\frac{I_\lambda(r)}{d\lambda} = 2\pi K_\lambda N_\lambda \begin{cases} \int_0^{u_m} \sin u \cos u \cos\frac{u}{2}\,du \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{p\sin}{1+\cos u}} 16 \sum_{mn} P_{mn}\, \ell\, d\ell + \\ \int_0^{u_m} \sin u \cos u \cos\frac{u}{2}\,du \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\frac{p\sin\varphi_o}{1+\cos u}}^{\frac{p\sin\varphi_o}{(1+\cos u)\cos u}} 16 \sum_{mn} P_{mn} \operatorname{Arc}\sin\left[\frac{\cot g u}{\ell}\sqrt{\frac{p^2\sin^2\varphi_o}{(1+\cos u)\cos u}} - \ell\right] \ell\, d\ell \end{cases}$$

$$I(r) = \int_0^{\infty} 4\pi K_\lambda\, d\lambda \begin{cases} \int_0^{u_m} \sin\frac{u}{2}\cos^2\frac{u}{2}\cos u\,du \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{p\sin\varphi_o}{1+\cos u}} 16 \sum_{mn} P_{mn}\, \ell\, d\ell + \\ \int_0^{u_m} \sin\frac{u}{2}\cos^2\frac{u}{2}\cos u\,du \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\frac{p\sin\varphi_o}{1+\cos u}}^{\frac{p\sin\varphi_o}{(1+\cos u)\cos u}} 16 \sum_{mn} P_{mn} \operatorname{Arc}\sin\left[\frac{\cot g u}{\ell}\sqrt{\frac{p^2\sin^2\varphi_o}{(1+\cos u)^2\cos^2 u}} - \ell^2\right] \\ \ell\, d\ell\, \psi(\ell - \frac{p\sin\varphi_o}{1+\cos u})\, \psi\left[\frac{p\sin\varphi_o}{(1+\cos u)\cos u} - \ell\right] \end{cases}$$

$$P_{mn} = \begin{cases} (m+1)(n+1)\; C_m^1\left(\frac{\cos u\cos\psi}{\sqrt{1-\sin^2 u\cos^2\psi}}\right) C_n^1\left(\frac{\cos u\cos\psi}{\sqrt{1-\sin^2 u\cos^2\psi}}\right)(1-\sin^2 u\cos^2\psi)^{-\frac{m+n+4}{2}} \\ \frac{J_{m+1}\left[ka\frac{\ell}{p}\cos u\cos\frac{u}{2}(1+\cos u)\right]}{ka\frac{\ell}{p}\cos u\cos\frac{u}{2}(1+\cos u)} \cdot \frac{J_{n+1}\left[ka\frac{\ell}{p}\cos u\cos\frac{u}{2}(1+\cos u)\right]}{ka\frac{\ell}{p}\cos u\cos\frac{u}{2}(1+\cos u)} \\ \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{p'=0}^{\infty} (-1)^{p+p'} \frac{\left[ka\frac{r}{p}\cos\frac{u}{2}(1+\cos u)\sin^2 u\cos^2\varphi\right]^{p+p'}}{2^{p+p'}\;p\,!\;p'\,!} \\ \frac{J_{m+1-p}\left[ka\frac{r}{p}\cos\frac{u}{2}(1+\cos u)\right]}{ka\frac{r}{p}\cos\frac{u}{2}(1+\cos u)} \cdot \frac{J_{n+1-p'}\left[ka\frac{r}{p}\cos\frac{u}{2}(1+\cos u)\right]}{ka\frac{r}{p}\cos\frac{u}{2}(1+\cos u)} \end{cases}$$

Des considérations simples de parité permettent de conclure que les P_{mn} pour lesquels $m+n=2k+1$ donnent une contribution nulle (en raison de l'intégration par rapport à la variable ψ) . On doit donc prendre en considération les seuls P_{mn} à indice m et n tels que $m + n = 2 k$: P_{oo} , P_{11} , $P_{o2}=P_{2o}$, $P_{13}=P_{31}$, P_{22} ... etc . La connaissance des $C_p^1(x)$:

$C_o^1(x) = 1$; $C_1^1(x) = 2 x$; $C_2^1(x) = 4 x^2-1$; $C_3^1(x) = 8 x^3 - 4 x$;

$C_4^1(x) = 16 x^4 - 12 x^2 + 1$ .....

permet alors le calcul des P_{mn} successifs et les intégrations une fois effectuées on obtiendra un développement de $\Psi(r)$ constitué de termes de différents ordres que l'on devra prendre en nombre d'autant plus grand que la précision requise sera plus grande.

IV . EXAMEN DU CAS PARTICULIER D'UN RAYONNEMENT INCIDENT PROVENANT D'UNE SOURCE PONCTUELLE INFINIMENT ELOIGNEE

A) Discussion de l'intérêt de ce cas particulier . Conditions dans lesquelles il peut constituer une approximation acceptable .

1º) En toute rigueur le cas actuel n'est jamais réalisé dans la pratique , les sources réelles même infiniment éloignées étant étendues quand on peut les considérer comme ponctuelles, le rayonnement qu'elles envoient sur un dispositif concentrateur terrestre ayant alors une intensité très faible . Il est cependant possible de parvenir à une réalisation suffisamment approchée en utilisant les sources quasi-ponctuelles (quelques mm de diamètre) de grande intensité (tubes spéciaux à décharges , plasmas) placées au foyer d'un miroir parabolique de distance focale assez grand (1 à 2 m) . Quoi qu'il en soit , l'intérêt théorique du cas de rayons incidents rigoureusement parallèles se manifeste sous différents aspects :

a) Circonstance non négligeable , les calculs se simplifient notablement et permettent l'obtention aisée de différentes approximations .

b) Dans l'hypothèse faite d'une macrogéométrie parfaite de la surface du miroir , la répartition de l'énergie dans le plan focal provient exclusivement des imperfections optiques de la surface : il s'agit donc en fait d'un cas de séparation des différents facteurs qui déterminent dans le cas général (source étendue) la répartition de l'énergie ; sous cet angle les résultats contribueront à une représentation et une interprétation plus claire des contributions respectives des imperfections optiques et de l'étendue de la source à l'apparition d'un répartition de l'énergie dans le plan focal .

2º) Dans le cas des sources étendues habituelles (soleil , lune , arc électrique au foyer d'un miroir parabolique auxiliaire) l'ouverture du pinceau élémentaire (diamètre apparent de la source) est faible (30 à 45 minutes d'arc) . Si dans ces conditions les dimensions des grains de relief de la surface du miroir sont telles que les angles de diffraction (écarts angulaires avec les rayons réfléchis de façon idéale) soient nettement plus grands que l'ouverture des rayons incidents , on pourra en première approximation négliger l'incidence du non-parallélisme de ceux-ci , et plus particulièrement lorsque la distance focale du miroir est faible (de l'ordre du mètre) . Plus généralement on pourra toujours considérer une telle approximation qui revient à assimiler sur le plan des caractéristiques géométriques (mais non énergétiques) le rayonnement incident à celui d'une source ponctuelle infiniment éloignée .

B) Expression particulière de la densité d'énergie dans le plan focal :

En partant de l'expression générale correspondant à une source étendue , on déduit aisément la forme particulière

que prend dans le cas actuel l'expression de la densité d'énergie dans le plan focal . Le raisonnement direction conduit au même résultat .

1º) Densité d'énergie en un point quelconque du plan focal

a) Calculs préliminaires et résultats

Dans le cas particulier actuel les calculs donnent :

$$\sin\varphi = \frac{r}{\rho}\sqrt{1 - \sin^2 u \cos^2\psi} = \frac{r}{p}(1+\cos u)\sqrt{1-\sin^2 u \cos^2\psi}$$

$$m = ka \cos\frac{u}{2} \sin\varphi = ka \frac{r}{p}(1+\cos u) \cos\frac{u}{2}\sqrt{1-\sin^2 u \cos^2\psi}$$

b) Expression formelle de la densité d'énergie en un point quelconque du plan focal

$$dI_\lambda(r) = 4\pi K_\lambda N \, d\lambda \int_0^{u_m} \sin\frac{u}{2} \cos^2 u \cos u \, du \int_0^{2\pi} \frac{4 J_1^2(m)}{m^2} \, d\psi$$

$$I(r) = \int_0^\infty 4\pi K_\lambda N \, d\lambda \int_0^{u_m} \sin\frac{u}{2} \cos^2\frac{u}{2} \cos u \, du \int_0^{2\pi} \frac{4 J_1^2(m)}{m^2} \, d\psi$$

c) Expression explicite de la densité d'énergie en un point du plan focal .

Il est possible de recourir au développement de $\frac{J_1(m)}{m}$ en série de fonctions de Bessel , conformément aux calculs du cas général . En vue des calculs numériques , nous utiliserons directement le développement en série de Neumann pour $\frac{J_1^2(z)}{z^2}$ (3)

$$4\frac{J_1^2(z)}{z^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+2)!}{2^{2p} p!(p+2)!\left[(p+1)!\right]^2} \cdot z^{2p}$$

Pour la commodité de la transcription nous poserons

$$m = 2\varrho\sqrt{1-\sin^2 u \cos^2\psi} \quad ; \quad \varrho = \frac{\pi a}{\lambda}\frac{r}{p}(1+\cos u)\cos\frac{u}{2}$$

$$\varrho = \eta(1+\cos u)\cos\frac{u}{2} \quad ; \quad \eta = \frac{\pi a}{\lambda}\frac{r}{p}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{4J^2(m)}{m^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{\varphi^2}{8}(1-\sin^2 u \cos^2\varphi) + \frac{5}{192}\varphi^4(1-\sin^2 u\cos^2\varphi)^2 \\ - \frac{7}{9216}\varphi^6(1-\sin^2 u\cos^2\varphi)^3 + \frac{7}{737280}\varphi^8(1-\sin^2 u\cos^2\varphi)^4 \\ - \frac{11}{7372800}\varphi^{10}(1-\sin^2 u\cos^2\varphi)^5 + \frac{143}{1238630400}\varphi^{12}(1-\sin^2 u\cos^2\varphi)^6 \\ + \ldots + \frac{(-1)^p (2p+2)!\,\varphi^{2p}}{p!\,(p+2)!\,[(p+1)!]^2}(1-\sin^2 u\cos^2\varphi)^p \end{array} \right.$$

Le calcul fait intervenir les intégrales $\mathcal{J}_k(u) = \int_0^{\pi} (1-\sin^2 u\cos^2\varphi)^k \, d\varphi$ et les expressions explicites de $dI_\lambda(r)$ et de $I(r)$ s'écrivent alors en faisant le changement de variable $\cos\frac{u}{2} = t$

$$dI_\lambda(r) = 16\pi K_\lambda N \, d\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}(2k+2)!\,\eta^{2k}}{k!(k+2)!\,[(k+1)!]^2} \int_{\cos\frac{u_m}{2}}^{1} t^{6k+2}(2t^2-1)\,\mathcal{J}_k(t)\,dt$$

$$I(r) = \int_0^{\infty} 16\pi K_\lambda N \, d\lambda \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}(2k+2)!\,\eta^{2k}}{k!(k+2)!\,[(k+1)!]^2} \int_{\cos\frac{u_m}{2}}^{1} t^{6k+2}(2t^2-1)\,\mathcal{J}_k(t)\,dt \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}(2^k+2)!}{k!(k+2)!\,[(k+1)!]^2} \int_0^{\infty} 16\pi K_\lambda N\,\eta^{2k}\,d\lambda \int_{\cos\frac{u_m}{2}}^{1} t^{6k+2}(2t^2-1)\mathcal{J}_k(t)\,dt$$

ou

$$\mathcal{J}_k(t) = \int_0^{\pi} \left[1 - 4\,t^2(1-t^2)\cos^2\varphi\right]^k d\varphi$$

On peut expliciter la valeur de $\mathcal{J}_k(t)$ en développant par la formule du binôme l'expression sous le signe somme :

$$\left[1 - 4\,t^2(1-t^2)\cos^2\varphi\right]^k = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p C_k^p 2^{2p} t^{2p}(1-t^2)^p \cos^{2p}\varphi$$

d'où

$$\mathcal{J}_k(t) = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p 2^{2p} C_k^p t^{2p}(1-t^2)^p \int_0^{\pi} \cos^{2p}\varphi\, d\varphi$$

$$= \sum_{p=0}^{k} (-1)^p 2^{2p} C_k^p t^{2p}(1-t^2)^p \cdot \frac{\pi(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

$$= \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{\pi C_k^p t^{2p}(1-t^2)^p (2p)!}{(p!)^2}$$

et par substitution les expressions littérales de $dI_\lambda(r)$ et $I(r)$

$$dI_\lambda(r) = 16\pi^2 K_\lambda N\, d\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}(2k+2)!\,\eta^{2k}}{k!(k+2)!\left[(k+1)!\right]^2} \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p C_k^p (2p)!}{(p!)^2} \int_{\cos\frac{U_m}{2}}^{\lambda} t^{6k+2p+2}(2t^2-1)(1-t^2)^p dt$$

$$I(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}(2k+2)!}{k!(k+2)!\left[(k+1)!\right]^2} \int_0^{\infty} 16\pi^2 K_\lambda N\, \eta^{2k}\, d\lambda \left(\sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p (2p)!\, C_k^p}{(p!)^2} \int_{\cos\frac{U_m}{2}}^{\lambda} t^{6k+2p+2}(2t^2-1)(1-t^2)^p dt \right)$$

Il est cependant plus pratique d'obtenir les résultats numériques par intégration graphique directe .

2º) Densité d'énergie au foyer géométrique du miroir

a) au foyer géométrique $r = o$ $\frac{4J^2(m)}{m^2} = 1$

$$d\,I_\lambda(o) = 16\pi^2 K_\lambda N\, d\lambda \int_{\cos\frac{U_m}{2}}^{\lambda} t^2(2t^2-1)\, dt \quad \text{ou plus généralement}$$

$$d\,I_\lambda(o) = 16\pi^2 K_\lambda N\, d\lambda \int_{\cos\frac{U_m}{2}}^{\cos\frac{U_o}{2}} t^2(2t^2-1)\, dt$$

$$I(o) = \int_o^{\infty} 16\pi^2 K_\lambda N\, d\lambda \int_{\cos\frac{U_m}{2}}^{1} t^2(2t^2-1)\, dt \quad \text{ou plus généralement}$$

$$I(o) = \int_0^{\infty} 16\pi^2 K_\lambda N\, d\lambda \int_{\cos\frac{U_m}{2}}^{\cos\frac{U_o}{2}} t^2(2t^2-1)\, dt$$

b) Posant $\mathcal{O}_o = 4\int_{\cos\frac{U_m}{2}}^{1} t^2(2t^2-1)\, dt$ ou plus généralement

$$\mathcal{O}_o = 4\int_{\cos\frac{U_m}{2}}^{\cos\frac{U_o}{2}} t^2(2t^2-1)\, dt$$

les expressions précédentes s'écrivent :

$$d\,I_\lambda(o) = 4\pi^2 \mathcal{O}_o(U_m)\, K_\lambda N\, d\lambda$$

$$I(o) = \mathcal{O}_o(U_m) \int_o^{\infty} 4\pi^2 K_\lambda N\, d\lambda$$

Sous cette forme l'on voit que $\mathcal{O}_o(U_m)$ détermine la densité maximum d'énergie dans le plan focal et est à rapprocher sous cet angle , de la "fonction géométrique" introduite par R. APARISSI . Le calcul donne $\mathcal{O}_o = \frac{1}{15}\left[4 + \sqrt{2}\,(1+\cos U_m)(2-3\cos U_m)\sqrt{1+\cos U_m}\right]$

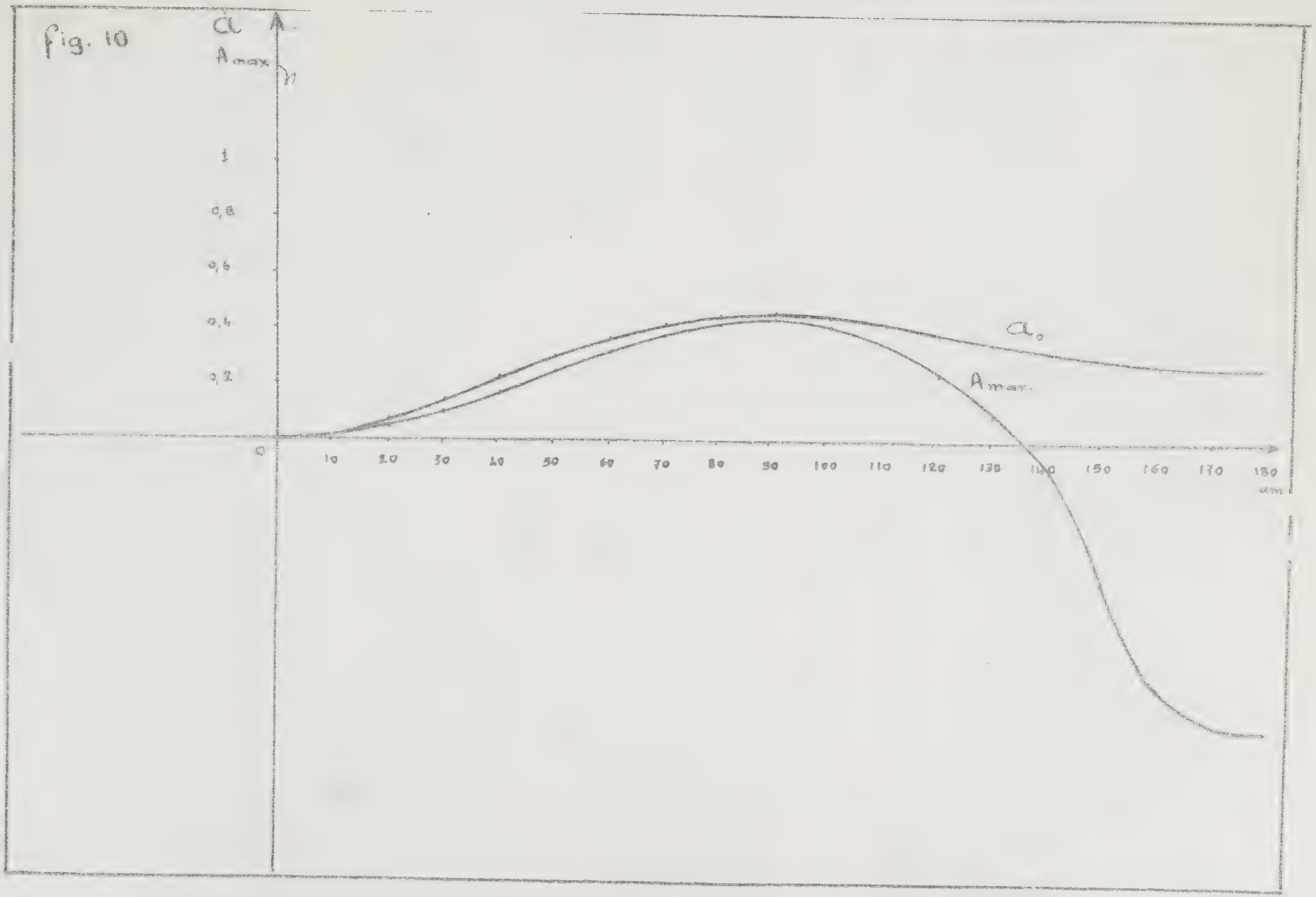


fig. 10
Cl
Amax
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
Cl0
Amax.

alors que l'expression correspondante de la "fonction géométrique" de R. APARISSI est :

$$A = \frac{\pi}{6}\left[\sqrt{2}\,(2 - \cos U_m)\sqrt{1+\cos U_m} - 2\right]$$

Les courbes de la figure 6 illustrent la variation de ces deux fonctions ; les anomalies signalées dans le comportement de la "fonction géométrique" de R. APARISSI apparaissent ici de façon très évidente .

3º) Forme explicite de l'expression de la densité d'énergie en un point du plan focal

a) Compte tenu des résultats des calculs précédents on peut écrire

$$dI_\lambda(r) = dI_\lambda(o)\left[1 - A_1\eta^2 + A_2\eta^4 - A_3\eta^6 + A_4\eta^8 + \ldots + (-1)^p A_p \eta^{2p} + \ldots\right]$$

avec

$$A_p = \frac{2^{2p}(2p+2)!}{p!\,(p+2)!\,[(p+1)!]^2} \cdot \frac{\displaystyle\int_{\cos\frac{U_o}{2}}^{\cos\frac{U_m}{2}} t^{6p+2}(2t^2-1)\,dt \int_0^{\pi}\left[1-4t^2(1+t^2)\cos^2\psi\right]^p d\psi}{\displaystyle\pi\int_{\cos\frac{U_o}{2}}^{\cos\frac{U_m}{2}} t^2(2t^2-1)\,dt}$$

La convergence du développement en série entière de la variable $\eta = \frac{\pi}{\lambda}\frac{a}{p}\frac{r}{p}$ aussi obtenu pour $\mathcal{E}_\lambda(r) = \frac{d\,I_\lambda(r)}{d\,I_\lambda(o)}$ est assurée par les théorèmes classiques relatifs à l'intégration des séries et peut d'ailleurs s'établir directement (rayon de convergence infini) .

b) Calcul explicite de $d\,I_\lambda(o)$ et $I(o)$

Pour expliciter la valeur de $dI_\lambda(o)$, il nous faudra relier , pour les radiations de longueur d'onde comprise entre λ et $\lambda + d\lambda$, l'énergie du rayonnement diffracté vers le plan-focal par les grains de relief de la surface du miroir avec l'énergie du rayonnement incident . Désignant par R_λ le pouvoir réflecteur de la surface (au sens macroscopique) pour les radiations de longueur d'onde λ , par Sm la surface de captation du rayonnement par le miroir , par E_λ l'intensité énergétique spectrale

du rayonnement incident on peut traduire la conservation de l'énergie du rayonnement "réfléchi" par la relation

$$\int_o^\infty 2\pi r \, dr \, dI_\lambda(r) = E_\lambda R_\lambda Sm \, d\lambda$$

En fait il suffira de prendre pour borne supérieure une valeur R de r suffisamment grande pour assurer l'égalité précédente dans la pratique tout en autorisant l'utilisation de la valeur calculée de $\sin\varphi$ (valable pour φ faible soit $\varphi \leqslant 10º$) . Dans le cas d'un miroir pour lequel $a \sim 0,1$ mm l'on voit que pour les radiations infrarouges ($\lambda \sim I\mu$)

$$m \sim \frac{2\pi \times 0,1}{10^{-3}} \sin\varphi \sim 108 \qquad \text{pour} \quad \varphi = 6º$$

a fortiori m est plus grand pour les longueurs d'onde inférieures et $J_1(m) \simeq o$ est vérifié avec une très bonne approximation sans que φ prenne des valeurs rendant incorrecte l'utilisation de l'expression calculée de $\sin\varphi$ dans l'hypothèse φ petit .

Les calculs donnent alors :

$$4 K_\lambda N = 3 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 tg^2 \frac{U_m}{2} \times \frac{\cos^3 \frac{U_m}{2}}{1-\cos^3 \frac{U_m}{2}} E_\lambda R_\lambda$$

On en déduit

$$d I_\lambda(o) = 3\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2 E_\lambda R_\lambda \Omega_o \, tg^2 \frac{U_m}{2} \, \frac{\cos^3 \frac{U_m}{2}}{1-\cos^3 \frac{U_m}{2}} \, d\lambda$$

$$I(o) = 3\pi^2 a^2 \Omega_o \, tg^2 \frac{U_m}{2} \, \frac{\cos^3 \frac{U_m}{2}}{1-\cos^3 \frac{U_m}{2}} \int_o^\infty E_\lambda R_\lambda \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

c) Calcul explicite de $dI_\lambda(r)$ et $I(r)$

Soit $\mathcal{E}_\lambda(r) = \frac{dI_\lambda(r)}{d\lambda} = \frac{dI_\lambda(r)}{dI_\lambda(o)} \cdot \frac{dI_\lambda(o)}{d\lambda} = \mathcal{E}_\lambda(o) \cdot \mathcal{E}_\lambda(r)$

$$dI_\lambda(r) = dI_\lambda(o)\,\mathcal{E}_\lambda(r) = dI_\lambda(o)\left[1-A_1\eta^2+A_2\eta^4-A_3\eta^6+(-1)^p\,Ap\,\eta^{2p}+\right]$$

$$= 3\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2 d\lambda E_\lambda R_\lambda Q_o \operatorname{tg}^2\frac{U_m}{2}\,\frac{\cos^3\frac{U_m}{2}}{1-\cos^3\frac{U_m}{2}}\left[1-A_1\eta^2+A_2\eta^4-A_3\eta^6+..+(-1)A_p\eta^{2p}+\right]$$

$$I(r) = 3\pi^2 a^2 Q_o \operatorname{tg}^2\frac{U_m}{2}\,\frac{\cos^3\frac{U_m}{2}}{1-\cos^3\frac{U_m}{2}}\int_o^\infty \frac{E_\lambda R_\lambda}{\lambda^2}\left[1-A_1\eta^2+A_2\eta^4..+(-1)^p Ap\eta^{2p}\right]d\lambda$$

$$\frac{I(r)}{I(o)} = \mathcal{E}(r) = \frac{\int_o^\infty \frac{E_\lambda R_\lambda}{\lambda^2}\left[1 - A_1\eta^2+A_2\eta^4 - A_3\eta^6+....+(-1)^p\,Ap\eta^{2p}+..\right]\,d\lambda}{\int_o^\infty \frac{E_\lambda R_\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda}$$

Le calcul effectif des intégrales conduisant aux valeurs de I(r) devra dans la pratique s'effectuer numériquement (intégration graphique) à partir de la courbe spectrale de répartition de l'énergie du rayonnement incident , du pouvoir réflecteur spectral de la surface réflectrice et du développement en série de $\mathcal{E}_\lambda(r)$.

C) Expression théorique de la densité d'énergie dans le plan focal pour un rayonnement incident assimilable à celui d'un corps noir à température T° K .

L'hypothèse d'un rayonnement incident assimilable à celui d'un corps noir à température T°K permet , par la connaissance de la fonction $E_\lambda = E_\lambda(\lambda, T)$ d'aboutir à une intégration complète en prenant en considération la variation relativement faible de R_λ dans la pratique exception faite de régions du spectre qui correspondent à une fraction faible de l'énergie transportée par le rayonnement (cas des radiations ultra-violettes) .

1°) Discussion des différents aspects de l'hypothèse proposée.

a) On sait que les sources réelles de rayonne-

ment (soleil , lune , arc électrique) ne rayonnent pas rigoureusement comme un corps noir , mais que ce dernier en donne souvent une représentation assez satisfaisante . Cependant dans le cas de rayonnement traversant l'atmosphère terrestre (soleil , lune) l'exl'existence de bandes d'absorption diverses (vapeur d'eau , gaz carbonique , ozone et à degré moindre méthane et oxyde nitreux) déforme de façon sensible la courbe de répartition spectrale de l'énergie en l'éloignant davantage de celle d'un corps noir .

b) L'examen des courbes de répartition spectrale de l'énergie du rayonnement solaire après traversée de l'atmosphère proposées par P. MOON[9] à partir des résultats expérimentaux de divers auteurs (ABBOT , FABRY et BUISSON , LANGLEY , PETTIT WILSING etc...) montre que pour des valeurs pas trop importantes (inférieurs à 3) de la masse optique de l'atmosphère l'incidence des bandes d'absorption sur l'allure de la courbe de répartition spectrale reste dans des limites permettant d'assimiler en première approximation le rayonnement solaire avec celui d'un corps noir dont la température est déterminée en conséquence .

c) Pour des radiations monochromatiques la température ainsi définie coïncide avec la température du rayonnement non en équilibre thermique (LANDY)

$$T_\lambda = \frac{h\,c}{k\lambda} \cdot \frac{1}{\mathrm{Log}\left[1 + \frac{2\,h\,c^2}{\lambda^5 e_\lambda}\right]}$$

Cette température , qui ne dépendrait pas de la longueur d'onde si le rayonnement était dans des conditions d'équilibre thermique, variera en fait avec les radiations monochromatiques considérées . On sera donc amené à adopter pour valeur de T une valeur moyenne en pondérant les longueurs d'ondes par l'énergie qu'elles transportent . Sur le plan des calculs , l'application au cas d'un rayonnement de source étendue de diamètre apparent $2\,\varphi_o$ devra se fai-

re en prenant en considération le fait que l'intensité spectrale E_λ est liée à e_λ par la relation

$$E_\lambda = e_\lambda \cdot \Omega_o = e_\lambda \cdot \pi \sin^2 \varphi_o$$

D'où

$$T_\lambda = \frac{h\,c}{k\lambda} \cdot \frac{1}{\mathrm{Log}\left\{1 + \frac{2hc^2\pi\sin^2\varphi_o}{\lambda^5 \cdot E_\lambda}\right\}}$$

On notera (fait déjà signalé) les conséquences de la nécessité de traiter sous l'angle des propriétés énergétiques la source considérée en source étendue bien que l'on néglige l'incidence de son diamètre apparent sur la répartition de l'énergie (approximation discutée) , aucune identification physique ne pouvant se faire autrement .

Quant le rayonnement incident est le rayonnement solaire, on peut prévoir que la température T correspondante sera comprise entre celles Ts de la photosphère (Ts $\simeq$ 6000º K) et Tm du corps noir dont le rayonnement transporte globalement la même densité d'énergie que le rayonnement solaire au niveau de la mer (Tm $\sim$ 4000º K) .

2º) Calcul de la densité d'énergie dans le plan focal .

Avec nos hypothèses l'expression de $dI_\lambda(r)$ devient

$$I(r) = \frac{2\pi hc^2 \sin^2\varphi_o}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1\right)} \cdot 3\left[\frac{\pi a}{\lambda}\right]^2 R_\lambda \mathcal{U}\, d\lambda \left[1 - A_1\eta^2 + A_2\eta^4 - A_3\eta^6 + \ldots + (-1)^p A_p \eta^{2p} + \ldots\right]$$

avec

$$\mathcal{U}(U_m) = \Omega_o(U_m) \times \mathrm{tg}^2\frac{U_m}{2} \times \frac{\cos^3\frac{U_m}{2}}{1 - \cos^3\frac{U_m}{2}}$$

D'où $I(r) = 6\pi^3 a^2 hc^2 \mathcal{U} \sin^2\varphi_o \int_o^\infty R \frac{d\lambda}{\lambda^7}\left[1 - A_1\eta^2 + A_2\eta^4 + \ldots + (-1)^p A_p \eta^{2p} + \right]$

En faisant le changement de variable $x = \frac{hc}{k\lambda T}$ $dx = -\frac{hc\,d\lambda}{kT\lambda^2}$

$\eta = \frac{\pi a}{\lambda}\frac{r}{p} = x\,\frac{\pi a k T}{hc}\frac{r}{p} = y\,x$ et en admettant que $R_\lambda = R$

$I(r)$ prend la forme

$$I(r) = \frac{6\pi^3 k^6 T^6}{h^5 c^4} U a^2 R \sin^2\varphi_o \int_o^\infty \frac{x^5 dx}{e^{x-1}} \sum_{p=o}^{\infty} (-1)^p A p y^{2p} \cdot x^{2p}$$

$$= \frac{6\pi^3 k^6 T^6}{h^5 c^4} a^2 R \sin^2\varphi_o U \sum_{p=o}^{\infty} (-1)^p A p\, y^{2p} \int_o^\infty \frac{x^{2p+5} dx}{e^x - 1}$$

$$= \frac{6\pi^3 k^6 T^6}{h^5 c^4} U a^2 R \sin^2\varphi_o \zeta(6)\Gamma(6) \sum_{k=o}^{\infty} (-1)^k A_k \times$$

$$\times \frac{\zeta(2k+6)\Gamma(2k+6)}{\zeta(6)\Gamma(6)} \left(\frac{\pi a k T}{hc}\frac{r}{p}\right)^{2k}$$

$$I(r) = I(o) \sum_{k=o}^{\infty} (-1)^k A_k \cdot \frac{\zeta(2k+6)\Gamma(2k+6)}{\zeta(6)\Gamma(6)} \left(\frac{\pi a k T}{hc}\frac{r}{p}\right)^{2k}$$

En posant

$$I(o) = \frac{6\pi^3 k^6 T^6}{h^5 c^4} a^2 R \sin^2\varphi_o U \zeta(6)\Gamma(6)$$

$\zeta(x)$ désignant la fonction zéta de Riemann [10] pour laquelle on a $\zeta(2k) = \frac{(2\pi)^{2k} B_k}{2\,(2k)!}$, B_k nombre de Beruonilli de rang k .

En particulier $\zeta(6)\Gamma(6) = \frac{(2\pi)^6 B_3}{2 \cdot 6!} \times 5! = \frac{2^6 \pi^6 \times 1}{2 \times 6 \times 4\ 2} = \frac{8\pi^6}{6\ 3}$

$$\frac{\zeta(2p+6)\Gamma(2p+6)}{\zeta(6)\Gamma(6)} = (2\pi)^{2p} \frac{3}{p+3} \frac{B_{p+3}}{B_3}$$

D'où il découle que

$$I(o) = \frac{16}{21} \frac{\pi^9 k^6 T^6}{k^5 c^4} a^2 R \sin^2\varphi_o \alpha_o (U_m) . tg^2 \frac{U_m}{2} \cdot \frac{\cos^3 \frac{U_m}{2}}{1 - \cos^3 \frac{U_m}{2}}$$

$$I(r) = I_o \sum_{k=o}^{\infty} (-1)^k \frac{3}{k+3} \frac{B_{k+3}}{B_3} A_k \left(\frac{2\pi^2 a k T}{hc}\frac{r}{p}\right)^{2k}$$

Le développement de $I(r)$ en série entière du paramètre sans dimension β $\left(\beta = \frac{2\pi^2 a k T}{hc}\frac{r}{p}\right)$ a pour rayon de convergence $\rho = \frac{\pi}{4\cos^3 \frac{U_m}{2}}$ et la fonction représentée ne présente aucune singularité quand $\beta \longrightarrow \rho$.

Pour $U_m = \frac{\pi}{3}$, cos $\frac{U_m}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\rho = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Si a = 0,1 mm et T = 5000º K

$$\beta = \frac{2\pi^2 a k T}{hc}\left(\frac{r}{p}\right)_\ell \qquad \text{d'où } \left(\frac{r}{p}\right)_\ell = 1{,}8\ 10^{-3} \text{ et } \frac{r_\ell}{f} = 0{,}36\ 10^{-2}$$

On en conclut que dans le cas des miroirs précis couramment utilisés (pour lesquels a$\sim$0,03 à 0,06 mm) le développement obtenu permettra de couvrir la totalité de la région de la tâche focale correspondant à l'image de Gauss pour laquelle $\left(\frac{r}{f}\right)_g = 0{,}46.10^{-2}$ (cas du soleil et de la pleine lune) , puisqu'en effet pour une même ouverture du miroir

$$\frac{r_\ell}{f} = 0{,}6\ 10^{-2} \ (a = 0{,}06\text{mm}) \text{ et } \frac{r_\ell}{f} = 12{,}2.10^{-2} \ (a = 0{,}03\text{mm})$$

3º) Courbes théoriques de répartition de l'énergie dans le plan focal et valeurs théoriques de la densité d'énergie maximale .

a) Observations générales sur la détermination de la température du rayonnement incident :

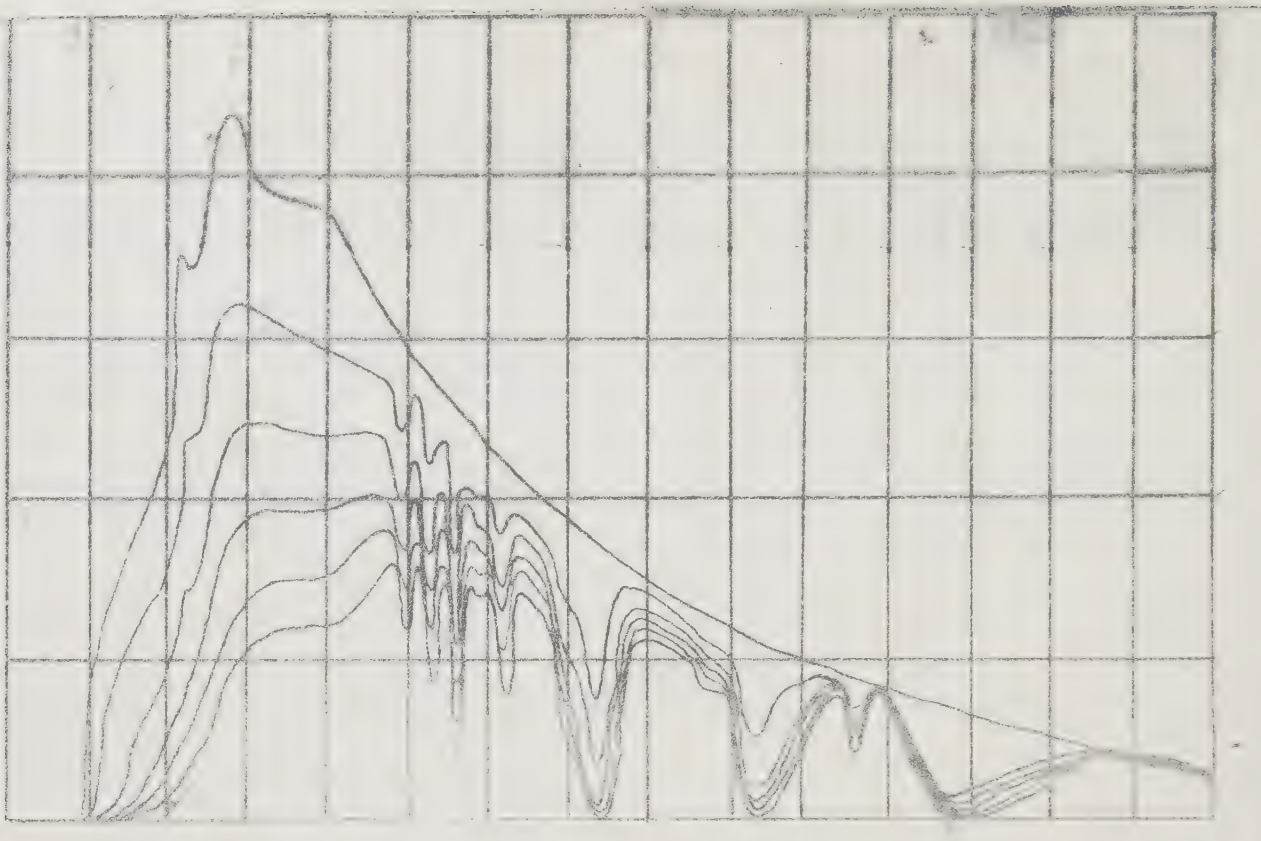
Une évaluation correcte de la température T du rayonnement incident se heurte à des difficultés de différents ordres :

1º) Du fait que le rayonnement incident n'est pas en équilibre thermodynamique , la température T_λ définie par la relation

$$T_\lambda = \frac{h\,c}{k\,\lambda} \times \frac{1}{\text{Log}\left[\frac{1+2\pi hc^2 \sin^2\varphi_o}{\lambda^5 E_\lambda}\right]}$$

varie avec la longueur d'onde considérée

2º) L'existence de bandes d'absorption dues à l'atmosphère (notamment celles de l'ozone dans l'ultra violet , de la vapeur d'eau et du gaz carbonique dans l'infra rouge) vient compliquer une situation déjà loin d'être simple sous l'angle de l'analyse théorique .



3º) La dépendance de la loi de répartition spectrale de l'énergie du rayonnement incident vis-à-vis de l'état de l'atmosphère traversée et de l'épaisseur de cette dernière introduit un facteur supplémentaire de complexité même si l'on néglige l'incidence d'autres sources (peu importantes dans la pratique) de variation des caractéristiques spectrales du rayonnement incident (variation diurne dans l'année , cycle d'activité du soleil dans le cas du rayonnement solaire) .

Compte tenu des considérations précédentes et dans le but d'une simplification et d'une rationalisation de l'analyse la détermination de la température du rayonnement incident sera envisagée pour différentes valeurs de la masse optique de l'atmosphère en utilisant les courbes et tables classiques de P. MOON . La valeur adoptée de T se réfère alors au fait expérimental de la prépondérance des radiations visibles et infra rouges du spectre solaire sous l'angle de l'énergie transportée (environ 40% de l'énergie totale pour chacune des régions du spectre) : on a pris la moyenne entre les températures T_λ calculées dans ces régions en se gardant cependant de valeurs trop différentes de celles obtenues ailleurs et en se laissant guider par le fait que l'on doit avoir $T \sim Ts < Tw$
Ts et Tw étant les températures déduites respectivement des lois de Stéfan - Boltzmann et du déplacement de Wien .

Le tableau ci-dessous donne les valeurs adoptées de T en fonction de m

m	1	1,25	1,5	2
TºK	5400	5300	5200	5000

b) Valeurs théoriques de la densité maximale d'énergie dans le plan focal .

Une fois connue la valeur de T et pour une ouverture

donnée du miroir , la valeur maximum de la densité d'énergie dans le plan focal dépend du rayon moyen a des grains de relief de la surface réflectrice , ce qui permet une classification des miroirs d'après la qualité optique de celle-ci . Les résultats numériques qui suivent se rapportent aux valeurs successives

$a = 0,1mm$ $a = 0,025mm$ $a = 0,005mm$

qui définissent trois classes de miroirs :

$1^{ère}$ Classe $a \geqslant 0,05mm$
$2^{ème}$ Classe $0,05 > a > 0,01mm$
$3^{ème}$ Classe $a \leqslant 0,01mm$

Valeurs théoriques calculées de la densité maximum d'énergie dans le plan focal pour des miroirs d'ouverture $U_m = 60º$, de pouvoir réflecteur macroscopique global $R = 0,8$ et de qualité optique variable

a_{mm} \ Tº K (m)	5400 (1)	5300 (1,25)	5200 (1,5)	5000 (2)
0,1	16,0kw/cm^2	14,34kw/cm^2	12,8kw/cm^2	9 kw/cm^2
0,025	1 kw/cm^2	0,90kw/cm^2	0,8kw/cm^2	0,56kw/cm^2
0,005	40 w/cm^2	35,9w/cm^2	32 w/cm^2	22,5 w/cm^2

Nous verrons ultérieurement que les valeurs théoriques ainsi obtenues présentent un accord assez satisfaisant avec les résultats expérimentaux relatifs à divers miroirs paraboliques précis travaillant dans différentes conditions .

A_p \ U_m	30°	40°	40° 28'	49°42'	50°	60°	60° 56'	61° 52'	70°	73°	80°
A_0	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01
A_1	O.3409326E+01	O.3060520E+01	O.3044093E+01	O.2730504E+01	O.2720876E+01	O.2431234E+01	O.2407765E+01	O.2384970E+01	O.2216400E+01	O.2105758E+01	O.2086811E+01
A_2	O.4902381E+01	O.4044954E+01	O.4007792E+01	O.3351596E+01	O.3333016E+01	O.2815891E+01	O.2777462E+01	O.2740628E+01	O.2483130E+01	O.2328733E+01	O.2303575E+01
A_3	O.3991909E+01	O.3084868E+01	O.3048202E+01	O.2436758E+01	O.2420427E+01	O.1987234E+01	O.1956663E+01	O.1927568E+01	O.1729857E+01	O.1616173E+01	O.1598022E+01
A_4	O.2111009E+01	O.1550549E+01	O.1529168E+01	O.1187279E+01	O.1178525E+01	O.9532277E+00	O.9378213E+00	O.9232174E+00	O.8254463E+00	O.7703302E+00	O.7616005E+00
A_5	O.7869142E+00	O.5556604E+00	O.5472508E+00	O.4168857E- 00	O.4136475E- 00	O.3319225E- 00	O.3264411E- 00	O.3212569E- 00	O.2868170E- 00	O.2675763E- 00	O.2645377E- 00
A_6	O.2184898E- 00	O.1496284E- 00	O.1472211E- 00	O.1107565E- 00	O.1098704E- 00	O.8778929E- 01	O.8632566E- 01	O.8494305E- 01	O.7579375E- 01	O.7070227E- 01	O.6989898E- 01
A_7	O.4701952E- 01	O.3144130E- 01	O.3091414E- 01	O.2306586E- 01	O.2287817E- 01	O.1823666E- 01	O.1793329E- 01	O.1764502E- 01	O.1574098E- 01	O.1468314E- 01	O.1451630E- 01
A_8	O.8082568E- 02	O.5304930E- 02	O.5213423E- 02	O.3868651E- 02	O.3836858E- 02	O.3055040E- 02	O.3003795E- 02	O.2955433E- 02	O.2636292E- 02	O.2459106E- 02	O.2431163E- 02
A_9	O.1136329E- 02	O.7350190E- 03	O.7220870E- 03	O.5338869E -03	O.5294741E- 03	O.4213096E- 03	O.4142367E- 03	O.4075629E- 03	O.3635404E- 03	O.3391059E- 03	O.3352525E- 03
A_{10}	O.1331709E- 03	O.8515934E- 04	O.8364001E- 04	O.6169166E- 04	O.6118005E- 04	O.4866468E- 04	O.4784740E- 04	O.4707630E- 04	O.4199087E- 04	O.3916852E- 04	O.3872344E- 04
A_{11}	O.1321520E- 04	O.8375053E- 05	O.8224174E- 05	O.6056303E- 05	O.6005980E- 05	O.4776459E- 05	O.4696230E- 05	O.4620538E- 05	O.4121382E- 05	O.3844369E- 05	O.3800685E- 05
A_{12}	O.1125133E- 05	O.7080084E- 06	O.6951651E- 06	O.5113756E- 06	O.5071216E- 06	O.4032648E- 06	O.3964908E- 06	O.3901000E- 06	O.3479569E- 06	O.3245695E- 06	O.3208813E- 06
A_{13}	O.8311003E- 07	O.5200668E- 07	O.5105866E- 07	O.3753299E- 07	O.3722056E- 07	O.2959631E- 07	O.2909914E- 07	O.2863009E- 07	O.2553712E- 07	O.2382068E- 07	O.2355000E- 07
A_{14}	O.5377790E- 08	O.3350357E- 08	O.3289072E- 08	O.2416640E- 08	O.2396516E- 08	O.1905559E- 08	O.1873548E- 08	O.1843348E- 08	O.1644207E- 08	O.1533694E- 08	O.1516266E- 08
A_{15}	O.3073938E- 09	O.1908382E- 09	O.1873389E- 09	O.1376036E- 09	O.1364575E- 09	O.1085007E- 09	O.1066780E- 09	O.1049585E- 09	O.9361954E- 10	O.8732703E- 10	O.8633472E- 10
A_{16}	O.1563602E- 10	O.9680446E- 11	O.9502635E- 11	O.6978386E- 11	O.6920256E- 11	O.5502418E- 11	O.5409984E- 11	O.5322780E- 11	O.4747746E- 11	O.4428633E- 11	O.4378310E- 11
A_{17}	O.7124116E- 12	O.4400972E- 12	O.4320036E- 12	O.3172033E- 12	O.3145608E- 12	O.2501117E- 12	O.2459101E- 12	O.2419463E- 12	O.2158082E- 12	O.2013030E- 12	O.1990155E- 12
A_{18}	O.2924410E- 13	O.1803439E- 13	O.1770244E- 13	O.1299700E- 13	O.1288872E—13	O.1024798E- 13	O.1007582E- 13	O.9913410E- 14	O.8842439E- 14	O.8248107E- 14	O.8154382E- 14
A_{19}	O.1087224E- 14	O.6695502E- 15	O.6572189E- 15	O.4824952E- 15	O.4784754E- 15	O.3804411E- 15	O.3740502E- 15	O.3680208E- 15	O.3282626E- 15	O.3061988E- 15	O.3027194E- 15
A_{20}	O.3678102E- 16	O.2262625E- 16	O.2220935E- 16	O.1630425E- 16	O.1616842E- 16	O.1285568E- 16	O.1263972E- 16	O.1243598E- 16	O.1109249E- 16	O.1034692E- 16	O.1022935E- 16
A_{21}	O.1137142E- 17	O.6989168E- 18	O.6860354E- 18	O.5036159E- 18	O.4994201E- 18	O.3970940E- 18	O.3904233E- 18	O.3841300E- 18	O.3426315E- 18	O.3196020E- 18	O.3159703E- 18
A_{22}	O.3225446E- 19	O.1981071E- 19	O.1944551E- 19	O.1427461E- 19	O.1415568E- 19	O.1125532E- 19	O.1106625E- 19	O.1088787E- 19	O.9711624E- 20	O.9058871E- 20	O.8955933E- 20
A_{23}	O.8423720E- 21	O.5171004E- 21	O.5075666E- 21	O.3725912E- 21	O.3694869E- 21	O.2937827E- 21	O.2888476E- 21	O.2841916E- 21	O.2534896E- 21	O.2364517E- 21	O.2337648E- 21
A_{24}	O.2032295E- 22	O.1247003E- 22	O.1224009E- 22	O.8985052E- 23	O.8910193E- 23	O.7084582E- 23	O.6965570E- 23	O.6853291E- 23	O.6112912E- 23	O.5702041E- 23	O.5637248E- 23
A_{25}	O.4543154E- 24	O.2786675E- 24	O.2735287E- 24	O.2007874E- 24	O.1991146E- 24	O.1583179E- 24	O.1556584E- 24	O.1531493E- 24	O.1366042E- 24	O.1274225E- 24	O.1259746E- 24
A_{26}	O.9437058E- 26	O.5786880E- 26	O.5680163E- 26	O.4169584E- 26	O.4134845E- 26	O.3287656E- 26	O.3232427E- 26	O.3180323E- 26	O.2836745E- 26	O.2546077E- 26	O.2616009E- 26
A_{27}	O.1826239E- 27	O.1119616E- 27	O.1098968E- 27	O.8067072E- 28	O.7999862E- 28	O.6360769E- 28	O.6253916E- 28	O.6153108E- 28	O.5488372E- 28	O.5119479E- 28	O.5061305E- 28
A_{28}	O.3300468E- 29	O.2023066E- 29	O.1985756E- 29	O.1457659E- 29	O.1445515E- 29	O.1149343E- 29	O.1130035E- 29	O.1111820E- 29	O.9917073E- 30	O.9250511E- 30	O.9145395E- 30
A_{29}	O.5583093E- 31	O.3421747E- 31	O.3358641E- 31	O.2465433E- 31	O.2444893E- 31	O.1943958E- 31	O.1911302E- 31	O.1880493E- 31	O.1677339E- 31	O.1564599E- 31	O.1546820E- 31
A_{30}	O.8858837E- 33	O.5428761E- 33	O.5328639E- 33	O.3911520E- 33	O.3878931E- 33	O.3084176E- 33	O.3032366E- 33	O.2983487E- 33	O.2661173E- 33	O.2482006E- 33	O.2454099E- 33

85°	Um = 40° 28'		Um = 49° 42'		Um = 60° 56'			Um = 61° 52'		
	tgUo = 0,100	tgUo = 0,200	tgUo = 0,100	tgUo = 0,200	tgUo = 0,100	tgUo = 0,200	tgUo = 0,3333	tgUo = 0,100	tgUo = 0,200	tgUo = 0,3333
O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01	O.1000000E+01
O.2054639E+01	O.3021002E+01	O.2954991E+01	O.2707994E+01	O.2643655E+01	O.2385879E+01	O.2323334E+01	O.2191513E+01	O.2363130E+01	O.2300712E+01	O.2169154E+01
O.2261921E+01	O.3943893E+01	O.3764836E+01	O.3293133E+01	O.3129497E+01	O.2724307E+01	O.2575714E+01	O.2278483E+01	O.2687835E+01	O.2540269E+01	O.2245159E+01
O.1568243E+01	O.2932330E+01	O.2764079E+01	O.2370370E+01	O.2188557E+01	O.1898703E+01	O.1740317E+01	O.1439889E+01	O.1870156E+01	O.1713289E+01	O.1415855E+01
O.7473210E+00	O.1476769E+01	O.1335965E+01	O.1142885E+01	O.1023969E+01	O.9000616E+00	O.7992168E+00	O.6178502E+00	O.8858742E+00	O.7861613E+00	O.6069166E+00
O.2595715E-00	O.5232046E+00	O.4599678E- 00	O.3969928E- 00	O.3448895E- 00	O.3098190E- 00	O.2664381E- 00	O.1924404E- 00	O.3048352E- 00	O.2619872E- 00	O.1889400E- 00
O.6858644E- 01	O.1392995E- 00	O.1189165E- 00	O.1043203E- 00	O.8783892E- 01	O.8101518E- 01	O.6747160E- 01	O.4554903E- 01	O.7970036E- 01	O.6633309E- 01	O.4470949E- 01
O.1424370E- 01	O.2894216E- 01	O.2397819E- 01	O.2148588E- 01	O.1753041E- 01	O.1664173E- 01	O.1342267E- 01	O.8475003E- 02	O.1637060E- 01	O.1319515E- 01	O.8317799E- 02
O.2385508E- 02	O.4828551E- 02	O.3880829E- 02	O.3563668E- 02	O.2817199E- 02	O.2756242E- 02	O.2153216E- 02	O.1272524E- 02	O.2711261E- 02	O.2116643E- 02	O.1248848E- 02
O.3289569E- 03	O.6615295E- 03	O.5156622E- 03	O.1863223E- 03	O.3724998E- 03	O.3758415E- 03	O.2844202E- 03	O.1574600E- 03	O.3697034E- 03	O.2795849E- 03	O.1545261E- 03
O.3799626E- 04	O.7578807E- 04	O.5728690E- 04	O.5556872E- 04	O.4124191E- 04	O.4292658E- 04	O.3147232E- 04	O.1633529E- 04	O.4222530E- 04	O.3093705E- 04	O.1603071E- 04
O.3729313E- 05	O.7370172E- 05	O.5401743E- 05	O.5394325E- 05	O.3879655E- 05	O.4166127E- 05	O.2959686E- 05	O.1441397E- 05	O.4098057E- 05	O.2909340E- 05	O.1414512E- 05
O.3148555E- 06	O.6071030E- 06	O.4378250E- 06	O.4503964E- 06	O.3139417E- 06	O.3478047E- 06	O.2394552E- 06	O.1095076E- 06	O.3421217E- 06	O.2353817E- 06	O.1074648E, 06
O.2310776E- 07	O.4475094E- 07	O.3083535E- 07	O.3268853E- 07	O.2208533E- 07	O.2524097E- 07	O.1684363E- 07	O.7238830E- 08	O.2482853E- 07	O.1655708E- 07	O.7103782E- 08
O.1487792E- 08	O.2850794E- 08	O.1904736E- 08	O.2081251E- 08	O.1363161E- 08	O.1607011E- 08	O.1039572E- 08	O.4201630E- 09	O.1580752E- 08	O.1021886E- 08	O.4123244E-09
O.8471345E- 10	O.1605741E- 09	O.1040400E- 09	O.1171862E- 09	O.7441746E- 10	O.9048190E- 10	O.5675032E- 10	O.2158575E- 10	O.8900338E- 10	O.5578484E- 10	O.2118303E- 10
O.4296090E- 11	O.8054621E- 11	O.5061357E- 11	O.5876783E- 11	O.3618898E- 11	O.4537536E- 11	O.2759701E- 11	O.9885270E- 12	O.4463391E- 11	O.2712750E- 11	O.9700839E- 12
O.1952782E- 12	O.3621113E- 12	O.2207029E- 12	O.2641587E- 12	O.1577620E- 12	O.2039589E- 12	O.1203050E- 12	O.4060849E- 13	O.2006262E- 12	O.1182583E- 12	O.3985085E- 13
O.8001252E- 14	O.1467381E- 13	O.8675684E- 14	O.1070329E- 13	O.6200382E- 14	O.8264067E- 14	O.4728214E- 14	O.1504883E- 14	O.8129027E- 14	O.4647774E- 14	O.1476806E- 14
O.2970347E- 15	O.5387376E- 15	O.3090201E- 15	O.3929337E- 15	O.2208238E- 15	O.3033855E- 15	O.1683927E- 15	O.5056555E- 16	O.2984280E- 15	O.1655278E- 15	O.4962214E- 16
O.1003725E- 16	O.1800378E- 16	O.1002022E- 16	O.1313058E- 16	O.7159749E- 17	O.1013815E- 16	O.5459769E- 17	O.1547650E- 17	O.9972491E- 17	O.5366883E- 17	O.1518775E- 17
O.3100367E- 18	O.5499695E- 18	O.2970385E- 18	O.4010918E- 18	O.2122298E- 18	O.3096839E- 18	O.1618387E- 18	O.4332883E- 19	O.3046235E- 18	O.1590854E- 18	O.4252043E- 19
O.8787751E- 20	O.1541628E- 19	O.8081122E- 20	O.1124281E- 19	O.5773599E- 20	O.8680593E- 20	O.4402733E- 20	O.1113859E- 20	O.8538748E- 20	O.4327830E- 20	O.1093078E- 20
O.2293750E- 21	O.3979475E- 21	O.2024852E- 21	O.2902112E- 21	O.1446623E- 21	O.2240726E- 21	O.1103140E- 21	O.2638507E- 22	O.2204112E- 21	O.1084373E- 21	O.2589280E- 22
O.5531387E- 23	O.9490614E- 23	O.4688077E- 23	O.6921147E- 23	O.3349250E- 23	O.5343830E- 23	O.2554013E- 23	O.5777838E- 24	O.5256509E- 23	O.2510562E- 23	O.5670039E- 24
O.1236089E- 24	O.2097462E- 24	O.1005969E- 24	O.1529589E- 24	O.7186727E- 25	O.1180998E- 24	O.5480329E- 25	O.1173136E- 25	O.1161700E- 24	O.5387092E- 25	O.1151249E- 25
O.2566883E- 26	O.4307626E- 26	O.2006207E- 26	O.3141352E- 26	O.1433236E- 26	O.2425443E- 26	O.1092932E- 26	O.2214672E- 27	O.2385810E- 26	O.1074336E- 26	O.2173353E- 27
O.4966259E- 28	O.8242389E- 28	O.3728158E- 28	O.6010771E- 28	O.2663381E- 28	O.4640927E- 28	O.2030994E- 28	O.3897307E- 29	O.4565092E- 28	O.1996441E- 28	O.3824594E- 29
O.8973655E- 30	O.1472955E- 29	O.6471277E- 30	O.1074151E- 29	O.4623031E- 30	O.8293542E- 30	O.3525350E- 30	O.6408460E- 31	O.8158021E- 30	O.3465373E- 30	O.6288895E- 31
O.1517772E- 31	O.2463924E- 31	O.1051581E- 31	O.1796813E- 31	O.7512389E- 32	O.1387323E- 31	O.5728665E- 32	O.9868421E- 33	O.1364653E- 31	O.5631204E- 32	O.9684303E- 33
O.2408014E- 33	O.3866207E- 33	O.1603134E- 33	O.2819422E- 33	O.1145260E- 33	O.2176881E- 33	O.8733322E- 34	O.1426117E- 34	O.2141310E- 33	O.8584743E- 34	O.1399510E- 34

c) Courbes théoriques de répartition de l'énergie dans le plan focal .

1º) Calculs et résultats préliminaires

Le calcul et l'intégration numériques conduisent , pour les coefficients Ap et $\frac{3}{p+3}\,\frac{Bp+3}{B_3}$ aux résultats des tableaux ci-dessous , où figurent les termes respectifs jusqu'au vingtième inclus .

On a d'autre part déterminé les valeurs numériques du facteur $\frac{2\pi^2\, a\, k\, T}{hc}$ de $\frac{r}{p} = \frac{r}{2f}$ dans le développement en série de I(r) pour différentes valeurs des paramètres a et T (ou m).

Les résultats montrent que les Ap présentent tous le même type de variation en fonction de l'angle de demi-ouverture U_m du miroir : décroissance , passage à une valeur minimum , puis croissance ; le minimum a cependant lieu pour des valeurs différentes de U_m . Pour un même miroir , l'évolution des Ap avec le rang p est remarquable en ceci que ce coefficient commence par croître nettement avant de diminuer progressivement à mesure que le rang p s'élève : les quatre premiers Ap sont ainsi plus grands que $A_o = 1$.

TABLEAU DES VALEURS DE Ap

Valeurs du paramètre $\frac{2\pi^2\, a\, k\, T}{hc}$ pour différentes valeurs de T(m) et de a .

a_{mm} \ Tº K (m)	5000	5200	5300	5400
0,100	685,80	713,23	726,95	740,66
0,050	342,90	356,62	363,48	370,33
0,025	171,45	178,31	181,74	185,16
0,010	68,58	71,32	72,70	74,07
0,005	34,29	35,66	36,35	37,03

2º) Courbes théoriques de répartition de l'énergie dans le plan focal .

A partir des résultats précédents on a tracé les courbes réduites de répartition de l'énergie dans le plan focal (la valeur maximum de la densité d'énergie étant prise pour unité) relatives à des miroirs de même ouverture appartenant aux trois classes de qualité optique de la classification adoptée plus haut Les résultats sont illustrés par les graphes des figures 7 (miroirs de différente qualité optique fonctionnant dans des conditions identiques de rayonnement) et 8 (même miroirs dans des conditions différentes de rayonnement) .

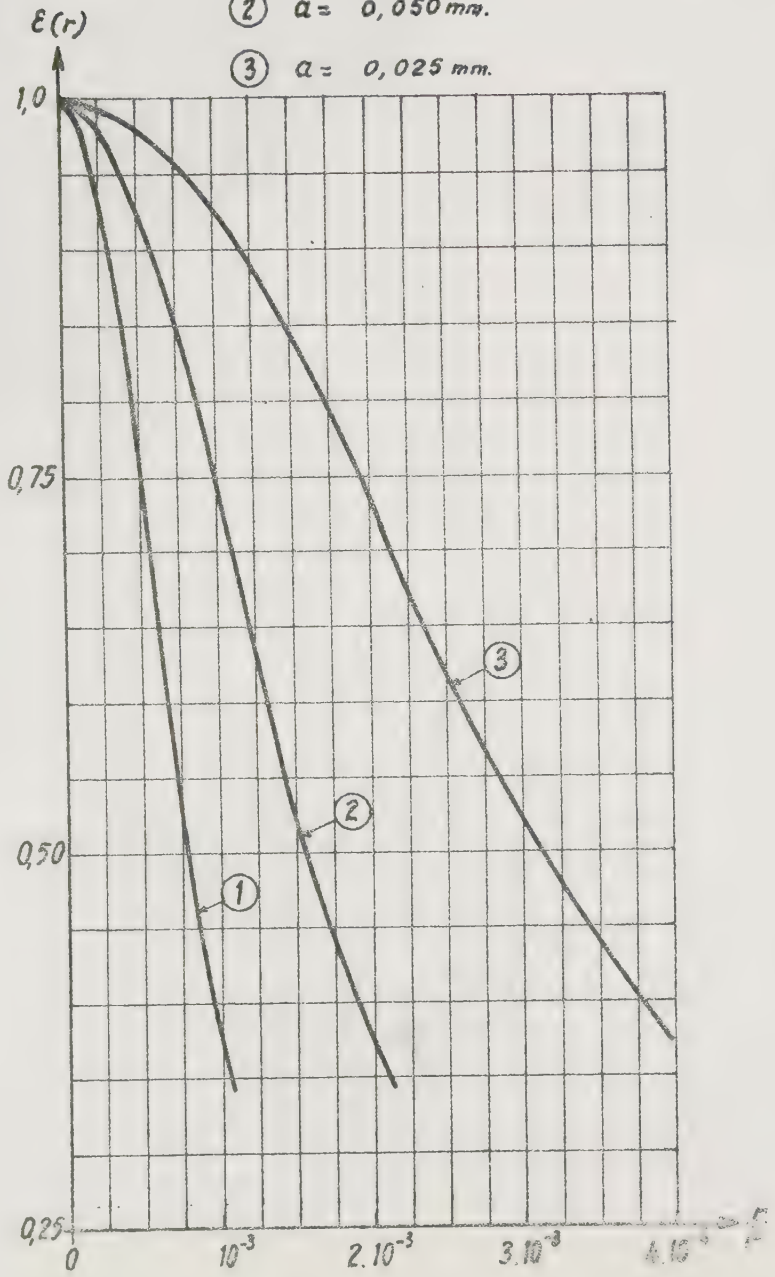
Conformément à l'ordre de grandeur du développement en série de I (r) , les courbes obtenues correspondent à la seule zone centrale de la tache focale et couvrent pratiquement la totalité de l'image de Gauss du soleil dans le miroir .

D) Etude des particularités de la courbe de répartition de l'énergie dans le plan focal .

1º) Discussion des résultats de l'approximation précédente .

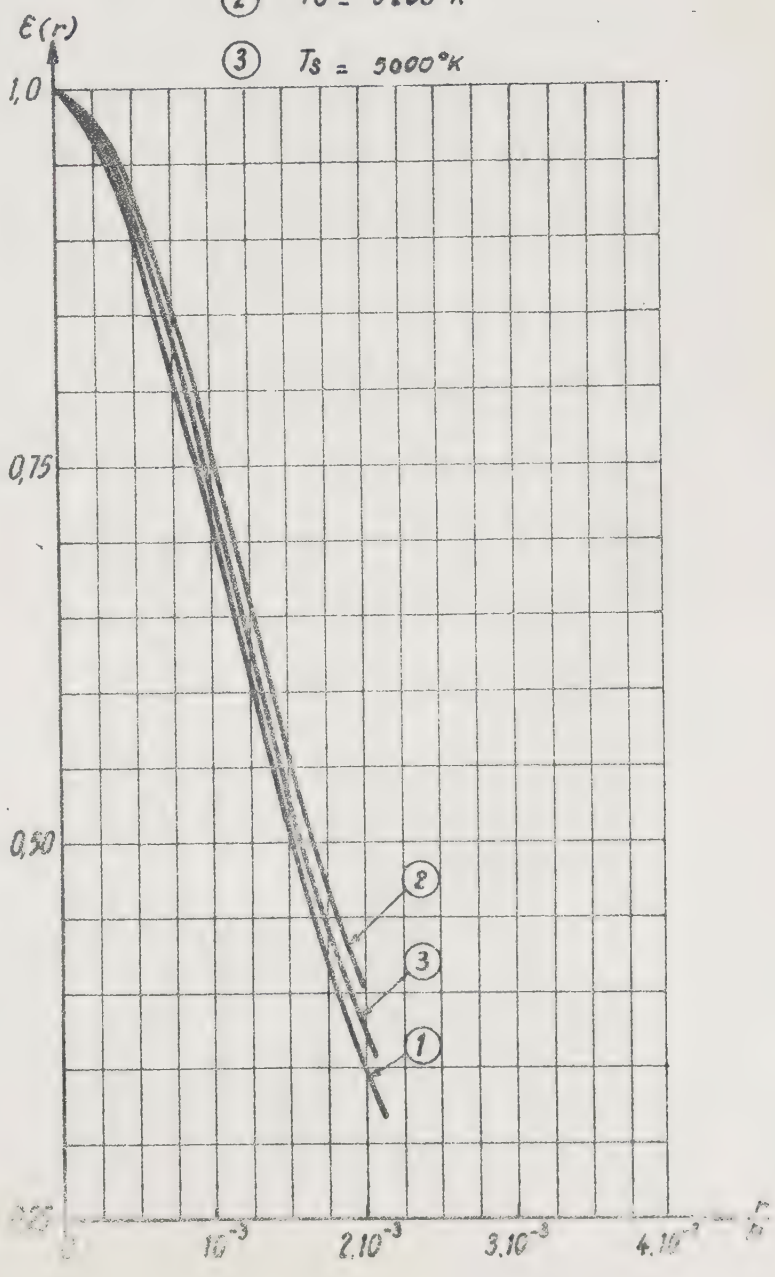
$Um = 60°$; $Ts = 5200°K$

① $a = 0,100$ mm.
② $a = 0,050$ mm.
③ $a = 0,025$ mm.



$Um = 60°$; $a = 0,050$ mm.

① $Ts = 5400°K$
② $Ts = 5200°K$
③ $Ts = 5000°K$

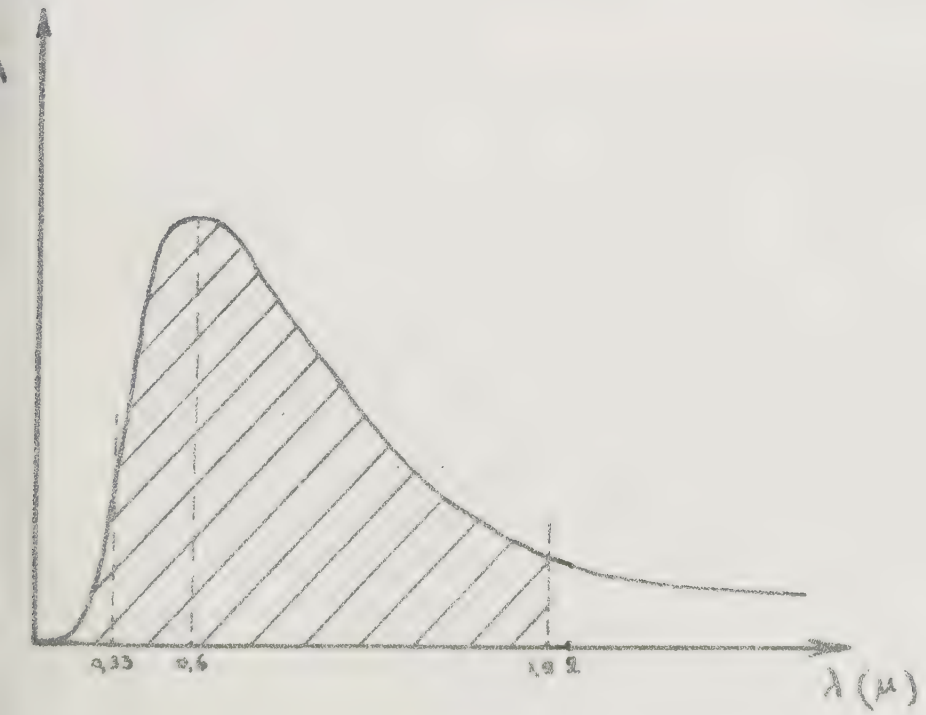


Le développement en série de I (r) obtenue par la procédure employée ne converge que pour des points de la zone centrale de la tache focale . Cette particularité semble devoir être une conséquence d'une approximation insuffisante : la courbe de répartition spectrale du rayonnement solaire incident s'étend en fait à un domaine de longueurs d'onde comprises entre 0,35 et 2 à 3 μ , alors que dans l'approximation adoptée précédemment elle était supposée couvrir toutes les longueurs d'ondes entre 0 et ∞ . Pour étudier la totalité de la courbe de répartition de l'énergie dans le plan focal , nous adoptons une procédure qui reflète mieux les conditions réelles en adoptant pour l'intégration par rapport à la longueur d'onde des bornes définies par les valeurs 0,35 et 3 μ .

La figure 9 ci-jointe illustre les particularités de l'approximation correspondant aux résultats précédents et l'a-

parties de la courbe
ves à des longueurs
à 3 μ .

iminaires
nt le développement
e les limites
mené pour simplifier
ssion approchée $x^5 e^{-x}$
ient important que
x^4 par x^5 , ce
allure de la courbe
e comparée à celle
des intégrales du



$$\int_0^x e^{-t}\, t^n\, dt = n!\left[1 - e^{-x}.\, E_n(x)\right]$$

$$E_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\int_\alpha^\beta e^{-t}\, t^n\, dt = n!\left[e^{-\alpha}\, En(\alpha) - e^{-\beta}\, En\,(\beta)\right]$$

Pour des valeurs de T comprises entre 5000º et 5400º K (masse optique de l'atmosphère variant entre 0 et 2) le calcul montre que $\alpha = x\,(1{,}9\,\mu) \simeq \frac{3}{2}$ et $\beta = x\,(0{,}33\,\mu) \simeq \frac{60}{7}$ valeurs numériques qui seront adoptées pour les calculs ultérieurs et correspondent à $m = 1{,}5$ ($T = 5200º$ K) . En effet quant m (ou T) varie entre 1,5 et 0

$$\frac{\Delta x}{x} = -\frac{\Delta T}{T} \quad ; \quad \left|\frac{\Delta x}{x}\right| < 2\,\%$$

3º) Allure et particularités de la courbe théorique de répartition de l'énergie dans le plan focal

a) Dans l'approximation adoptée le développement en série de I(r) s'écrit

$$I(r) = \frac{6\pi^3\, k^6\, T^6}{h^5\, c^4}\, \mathcal{U}\, a^2\, R \sin^2\varphi_o \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p\, Ap\, y^{2p} \int_\alpha^\beta e^{-x}\, x^{2p+5}\, dx$$

$$= \frac{6\pi^3\, k^6 T^6}{h^5\, c^4}\, a^2\, R \sin^2\varphi_o\, \mathcal{U} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p\, (2p+5)!\, Ap\left[e^{-\alpha}\, \underset{2p+5}{E}(\alpha) - e^{-\beta} \underset{2p+5}{E}(\beta)\right] y^{2p}$$

$$= I_o \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p\, \frac{Ap}{A_o}\, \frac{(2p+5)!}{5!}\, \frac{e^{-\alpha} E_{2p+5}(\alpha) - e^{-\beta} E_{2p+5}(\beta)}{e^{-\alpha} E_5(\alpha) - e^{-\beta} E_5(\beta)}$$

$$I_o = \frac{720\pi^3\, k^6\, T^6}{h^5\, c^4}\left[e^{-\alpha} E_5(\alpha) - e^{-\beta}\, E_5(\beta)\right] a^2\, R \sin^2\varphi_o\, \mathcal{U}$$

$$\mathcal{E}(r) = \frac{I(r)}{I_o} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p\, Ap\, .\, \frac{(2p+5)!}{5!}\, \frac{e^{-\alpha} E_{2p+5}(\alpha) - e^{-\beta} E_{2p+5}(\beta)}{e^{-\alpha} E_5(\alpha) - e^{-\beta} E_5(\beta)}\, y^{2p}$$

$$y = \frac{\pi\, a\, k\, T}{hc}\, \frac{r}{p}$$

b) Le calcul numérique conduit aux valeurs respec-

0	1	2	3	4	5	6	7
p	$\frac{(2p+5)!}{5!}10^{-2p}$	α = 1,40000 β = 8,00000 D_5 = 0,805563 D_{2p+5}/D_5	α = 1,40000 β = 8,20000 D_5 = 0,823204 D_{2p+5}/D_5	α = 1,40000 β = 8,40000 D_5 = 0,839552 D_{2p+5}/D_5	α = 1,40000 β = 8,57143 D_5 = 0,852497 D_{2p+5}/D_5	α = 1,5000 β = 8,57143 D_5 = 0,851242 D_{2p+5}/D_5	α = 1,6000 β = 8,57143 D_5 = 0,849658 D_{2p+5}/D_5
0	0.10000000 E+01	0.1000000 E+01	0.1000000 E+01	0.1000000 E+01	0.1000000 E+01	0.1000000 E+01	0.1000000 E+01
1	0.42000000 E+00	0.6789447 E+00	0.6978633 E+00	0.7313597 E+00	0.7161714 E+00	0.7323638 E+00	0.7336224 E+00
2	0.30240000 E+00	0.3517708 E+00	0.3747286 E+00	0.4179710 E- 00	0.3979383 E+00	0.4185850 E+00	0.4193619 E+00
3	0.33264000 E+00	0.1389388 E+00	0.1541536 E+00	0.1847449 E- 00	0.1702567 E+00	0.1850172 E+00	0.1853621 E+00
4	0.51891840 E+00	0.4243077 E- 01	0.4917542 E- 01	0.6367945 E- 01	0.5665654 E- 01	0.6377333 E- 01	0.6389226 E- 01
5	0.10897286 E+01	0.1021767 E- 01	0.1239136 E- 01	0.1739722 E- 01	0.1491965 E- 01	0.1742287 E- 01	0.1745538 E- 01
6	0.29640619 E+01	0.1979046 E- 02	0.2514232 E- 02	0.3835337 E- 02	0.3167226 E- 02	0.3841000 E- 02	0.3848180 E- 02
7	0.10137092 E+02	0.3139914 E- 03	0.4182059 E- 03	0.6940734 E- 03	0.5516036 E- 03	0.6951053 E- 03	0.6964189 E- 03
8	0.42575785 E+02	0.4148138 E- 04	0.5797882 E- 04	0.1047368 E- 03	0.8011272 E- 04	0.1049000 E- 03	0.1051131 E- 03
9	0.21543347 E+03	0.4633706 E- 05	0.6833283 E- 05	0.1338925 E- 04	0.9895390 E- 05	0.1341774 E- 04	0.1346029 E- 04
10	0.12926008 E+04	0.4716946 E- 06	0.7512085 E- 06	0.1511971 E- 05	0.1118223 E- 05	0.1522953 E- 05	0.1543330 E- 05
11	0.90740578 E+04	0.7399131 E- 07	0.1357606 E- 06	0.2097532 E- 06	0.2041201 E- 06	0.2188150 E- 06	0.2367609 E- 06
12	0.73681349 E+05	0.4624457 E- 07	0.9060705 E- 07	0.8739717 E- 07	0.1242470 E- 07	0.9627860 E- 07	0.1139960 E- 06

tives de $e^{-\alpha}E_{2p+5}(\alpha)$, $e^{-\beta}E_{2p+5}(\beta)$, $e^{-\alpha}E_{2p+5}(\alpha) - e^{-\beta}E_{2p+5}(\beta)$ relatives aux différentes valeurs de p (0,1,2,...) figurant dans le tableau ci-joint , où les valeurs numériques des rapports

$$a_p = \frac{e^{-\alpha}E_{2p+5}(\alpha) - e^{-\beta}E_{2p+5}(\beta)}{e^{-\alpha}E_5(\alpha) - e^{-\beta}E_5(\beta)}$$

sont également indiquées .

TABLEAU DES VALEURS NUMERIQUES
Voir feuille jointe

c) L'expression littérale de $\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}(y) = \frac{I(r)}{I\ 0}$ s'écrit :

$$\mathcal{E}(y) = 1 - \frac{7!}{5!}\ a_1 A_1 y^2 + \frac{9!}{5!}\ a_2 A_2 y^4 - \frac{11!}{5!}\ a_3 A_3 y^6 + \frac{13!}{5!}\ A_4 y^8$$
$$+ \ldots\ldots + (-1)^p\ \frac{(2p+5)!}{5!}\ ap\ Ap\ y^{2p} + \ldots\ldots$$

L'étude de ce développement en série montre qu'il a un rayon de convergence infini :

$$\frac{U_{k+1}}{U_k} = \frac{(2k+7)!}{(2k+5)!}\ \frac{a_{k+1}}{a_k}\ \frac{A_{k+1}}{A_k}\ y^2$$

$$\mathcal{E}'(y) = \frac{2.7!}{5!} \left\{ \begin{array}{l} -a_1A_1y + 2.8.9.\ a_2A_2y^3 - 3.8.9.10.11.\ a_3\ A_3\ y^5 \\ +4.8.9.10.11.12.13.\ a_4A_4y^7 - 5.8.9.10.11.12.13.14.15.\ a_5A_5y^9 \\ +\ldots + (-1).p.8.9.10\ldots(2p+5)\ ap\ Ap\ y^{2p-1} + \ldots. \end{array} \right.$$

La racine $y = o$ $(r = o)$ correspond au maximum central (foyer géométrique) . L'étude des autres racines de $\mathcal{E}'(y)$ peut se conduire graphiquement en cherchant l'intersection de la droite (Δ) d'équation $Z = a_1 A_1 y$ avec la courbe (C) d'équation

$$Z = 2.8.9.\ a_2\ A_2\ y^3 - 3.8.9.10.11.\ a_3\ A_3\ y^5 + \ldots.$$

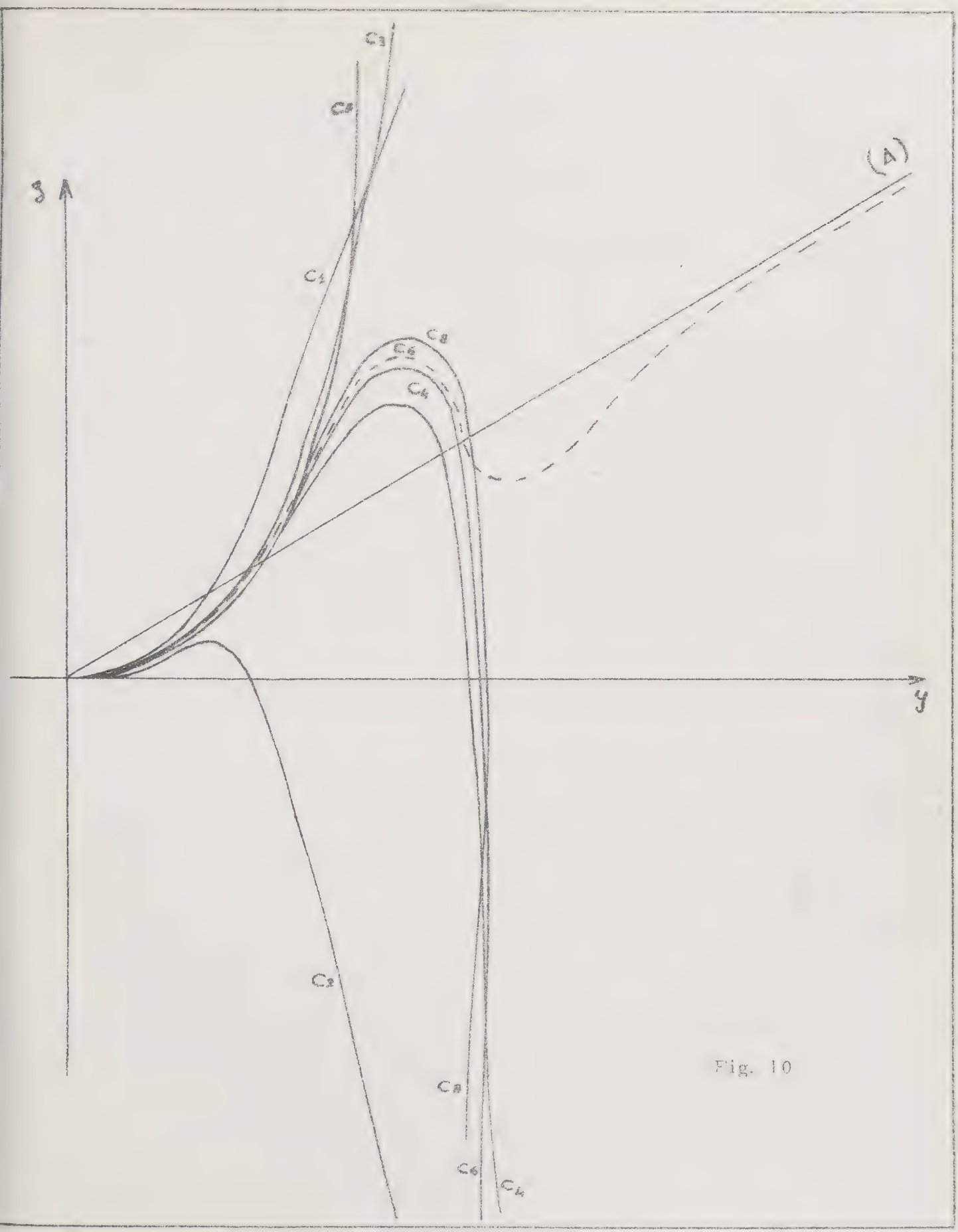


Fig. 10

En remarquant que d'après l'expression littérale générale de I(r)

$$I(r) = \int_{\lambda_o}^{\lambda_m} 4\pi K_\lambda N \, d\lambda \int_{U_o}^{U_m} \sin\frac{u}{2}\cos^2\frac{u}{2}\cos u \, du \int_o^{2\pi} \frac{4 J_1^2(m)}{m^2} \, d\psi$$

$$I(r) \longrightarrow o \quad \text{quand} \quad r(m) \longrightarrow \infty$$

$$\frac{dI(r)}{dr} \longrightarrow o \quad \text{quand} \quad r(m) \longrightarrow \infty$$

On en déduit que (C) doit admettre (Δ) pour asymptote et se situe au dessous de (Δ) quand $y(r) \longrightarrow \infty$, I(r) décroissant . En construisant la série des courbes (C_1) , (C_2) , (C_3).... d'équations respectives .

$$Z_1 = 2.8.9.\ a_2A_2\ y^3$$

$$Z_2 = 2.8.9.\ a_2A_2\ y^3 - 3.8.9.10.11.\ a_3A_3\ y^5$$

$$Z_3 = 2.8.9.\ a_2A_2\ y^3 - 3.8.9.10.11.a_3A_3y^5+4.8.9.10.11.12.13.a_4A_4y^7$$

. . . . . .

$$Z_p = 2.8.9.\ a_2A_2\ y^3 - 3.8.9.10.11.\ a_3A_3\ y^5 + \ldots .$$

$$+ (-1)^{p+1}(p+1)\ 8.9.10\ldots(2p+7)\ a_{p+1}A_{p+1}\ y^{2p+1}$$

on est conduit à conclure que l'allure générale de (C) est telle que (C) et (Δ) ont un nombre pair de points communs en dehors de l'origine (figure 10) .

Les racines non nulles de $\mathcal{E}'(y)$ sont les zéros de l'équation :

$$F(y^2)=F(Y) = \begin{cases} a_1A_1 - 2.8.9.\ a_2A_2\ Y + 3.8.9.10.11.\ a_3A_3\ Y^2 \\ -4.8.9.10.11.12.13.\ a_4A_4\ Y^3+5.8.9.10.11\ldots15\ a_5A_5\ Y^4 + \\ +\ldots+(-1)^{p-1}p.8.9.10\ldots.(2p+5)ap\ Ap\ Y^{p-1} \end{cases}$$

$$= a_1\ A_1(1-e_1\ Y + e_2\ Y^2 - e_3\ Y^3 + e_4\ Y^4 - e_5\ Y^5 + \ldots.)$$

$$e_o = 1$$

$$e_1 = 2.8.9.\ \frac{a_2 A_2}{a_1 A_1} \quad ; \quad e_4 = 5.8.9.10.11.12.13.14.15.\ \frac{a_5\ A_5}{a_1\ A_1}$$

$$ep - 1 = p\ 8.9.10.11..... (2p+5)\ \frac{ap\ Ap}{a_1\ A_1}$$

Un théorème de la théorie des équations dû à WHITTAKER(11) permet le calcul de la plus petite des racines de F(Y) suivant l'une des expressions

$$(I) \qquad Y = \frac{e_o}{e_1} + \frac{e_2}{e_1 \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ e_o & e_1 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} e_2 & e_3 \\ e_1 & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ e_o & e_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_o & e_1 & e_2 \\ o & e_o & e_1 \end{vmatrix}}$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} e_2 & e_3 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ e_o & e_1 & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_o & e_1 & e_2 \\ o & e_o & e_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_o & e_1 & e_2 & e_3 \\ o & e_o & e_1 & e_2 \\ o & o & e_o & e_1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{e_o}{e_1} + \frac{e_2}{e_1\ e_{11}} + \frac{e_{22}}{e_{11}\ e_{111}} + \frac{e_{222}}{e_{111}\ e_{1111}} + ...$$

(2)

$$\frac{1}{Y_1} = \lim_{r \to \infty} \frac{h_{r+1}}{h_r}\ ,\ \text{les } h_p \text{ étant définis par}$$

$$(1 - e_1 Y + e_2 Y^2 - e_3 Y^3 + e_4 Y^4 - e_5 Y^5 + ...)^{-1} = \sum_{r=o}^{\infty} h_r Y^r$$

D'où les valeurs des h_r

$$h_1 = e_1 \quad ; \quad h_2 = e_1^2 - e_2 \quad ; \quad h_3 = e_1^3 - 2\ e_1\ e_2 + e_3$$

$$h_4 = e_1^4 - 3\ e_1^2\ e_2 + 2\ e_1\ e_3 - e_4 + e_2^2$$

Une valeur approchée de la 2è racine finie de F(Y) peut être calculée en éliminant la racine infiniment grande

de $F(Y)$ ($\mathcal{E}' = o$ pour y et $Y \longrightarrow \infty$) par l'artifice du passage , pour $F_n(Y) = 1 - e_1 Y + e_2 Y^2 + ... + (-1)^n e_n Y^n$ au polynôme $\varphi_n(Z)$ dont les zéros sont les inverses de ceux de $F_n(Y)$: $\varphi_n(Z) = Z^n - e_1 Z^{n-1} + e_2 Z^{n-2} + ... + (-1)^n e_n$

Pour n suffisamment grand $e_n \longrightarrow o$ et

$$\varphi_n(Z) = Z \left[Z^{n-1} - e_1 Z^{n-2} + e_2 Z^{n-2} + ... + (-1)^{n-1} e_{n-1} \right]$$

$$= Z \varphi_{n-1}(Z)$$

$$\varphi_{n-1}(Z) = e_{n-1} \left[1 - \mathcal{E}_1 Z + \mathcal{E}_2 Z^2 + ... + (-1)^{n-1} \mathcal{E}_{n-1} Z^{n-1} \right]$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{e_{n-2}}{e_{n-1}} \qquad \mathcal{E}_2 = \frac{e_{n-3}}{e_{n-1}} \quad ..... \qquad \mathcal{E}_p = \frac{e_{n-p-1}}{e_{n-1}} \quad .....$$

A la plus grande racine finie de $F_n(Y)$ correspond alors la plus petite racine de $\varphi_{n-1}(Z)$, calculable par application du théorème de WHITTAKER . Pour effectuer le calcul numérique approché , il faut préalablement déterminer la valeur de n à partir de laquelle la procédure est applicable ($e_n \ll 1$) .

En utilisant les encadrements déjà obtenus par a_k et A_k on a pour k suffisamment grand

$$\frac{e^{-\beta} \beta^{2k+7}}{(2k+6)(2k+7)} A_k < a_k A_k < \frac{e^{-\beta} \beta^{2p+6}}{2p+6} A_k$$

En tenant compte de l'expression de A_k , on trouve alors , pour la valeur $\beta = \frac{60}{7}$ $n \simeq 12$

Remarquant que k assez grand on a avec une bonne approximation

$$\frac{32 \beta \cos^6 \frac{U_m}{2}}{k+2} < \frac{(2k+7)!}{(2k+5)!} \frac{ak+1}{ak} \frac{Ak+1}{Ak} < \frac{32 \beta}{k+1}$$

l'on voit à partir de la formule de WHITTAKER que la série défi-

nissant la plus petite racine de $\varphi_{r-1}(Z)$ converge très rapidement du fait des valeurs des ε_o , $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p$. On peut adopter comme valeur approchée de Z_1 : $\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_1} = \frac{e_{n-1}}{e_{n-2}} = \frac{e_{12}}{e_{11}} = Z'_1$

et écrire

$$\frac{32\ \beta\ \cos^6 \frac{U_m}{2}}{13} < Z'_1 < \frac{32\ \beta}{12}$$

$$\left[\frac{32\ \beta\ \cos^6 \frac{U_m}{2}}{13}\right]^{\frac{1}{2}} < Z'^{\frac{1}{2}}_1 < \left[\frac{32\ \beta}{12}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\frac{13}{32\ \beta\ \cos^6 \frac{U_m}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{Z'^{\frac{1}{2}}_1} > \left[\frac{12}{32\ \beta}\right]^{\frac{1}{2}}$$

D' où $y'_2 = Y'^{\frac{1}{2}}_2 = \frac{1}{Z'^{\frac{1}{2}}_1}$ défini par

$$\left[\frac{13}{32\ \beta\ \cos^6 \frac{U_m}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} > Y'_2 > \left[\frac{12}{32\ \beta}\right]^{\frac{1}{2}}$$

pour $U_m = \frac{\pi}{3} = 60º$ $\beta = \frac{60}{7}$

$\frac{3 \times 7}{8 \times 60} = \frac{7}{160}$ $\frac{13 \times 7}{32 \times 60} = \frac{91}{1920}$

D'où $0,32 > y'^2 > 0,217$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des deux racines non nulles y_1 et y_2 de $F(y)$ pour des miroirs de différents angles de demi-ouverture m calculées par la procédure décrite .

m	40º	50º	62º	70º	78º
y_1	0,146	0,156	0,167	0,160	0,160
y_2	0,217 0,262	0,217 0,292	0,217 0,346	0,217 0,374	0,2170 0,464

3º) Conclusions relatives aux particularités de la courbe de répartition de l'énergie dans le plan focal .

a) Pour les valeurs habituelles de l'ouverture angulaire des miroirs paraboliques précis , les deux extréma secondaires se situent à des distances du foyer géométrique sensiblement double l'une de l'autre , et se succèdent dans l'ordre minimum - maximum , les valeurs correspondantes de la variable $y = \frac{\pi a k T}{hc} \frac{r}{p}$ étant respectivement de 0,17 et 0,34 .

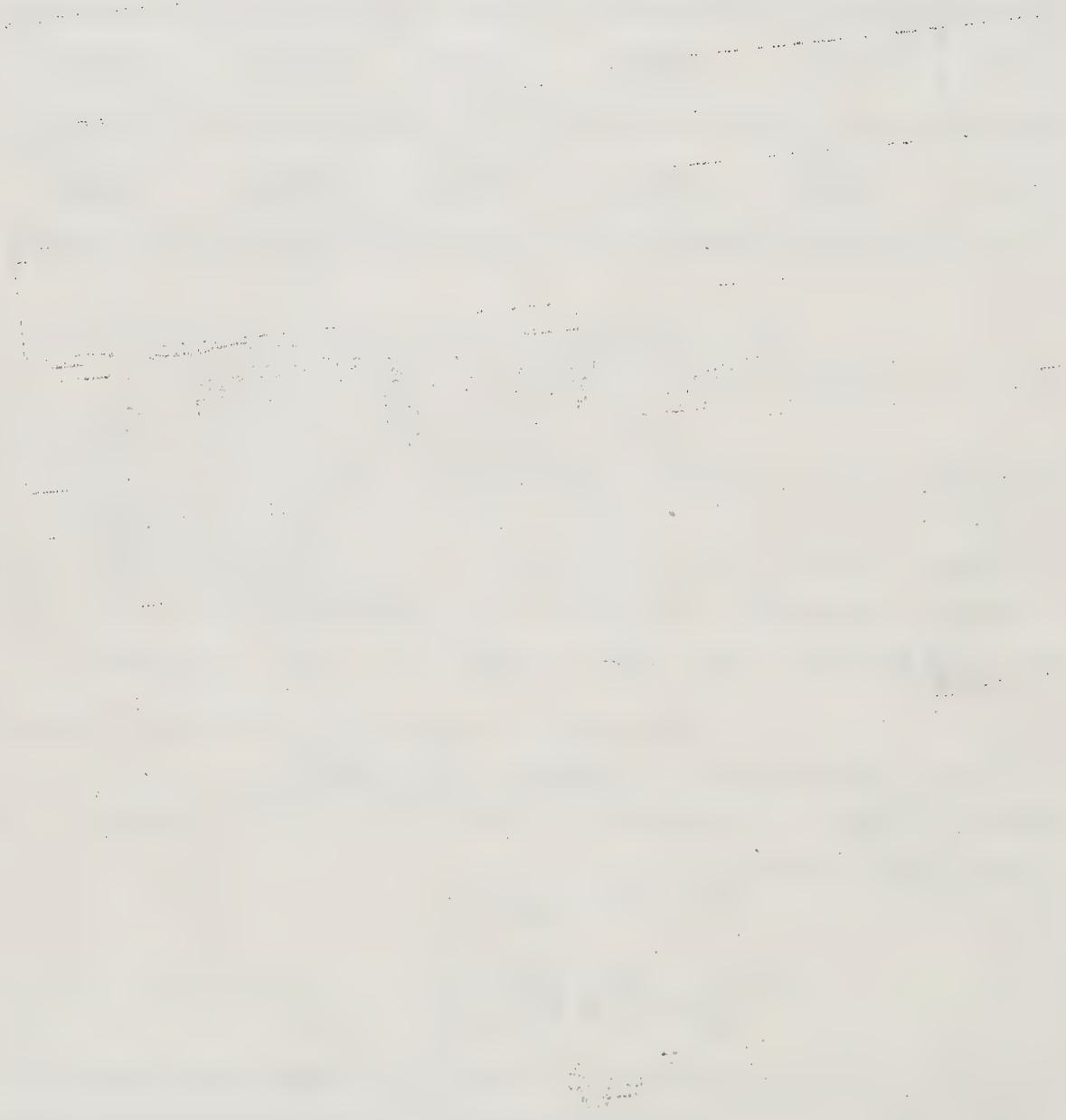
b) Ordre de grandeur des distances séparant le foyer géométrique des extréma secondaires .

Pour la valeur $T = 5200º$ K $(m = 1,5)$, il est possible de calculer les valeurs

$$\rho_1 = \frac{r1}{f} = \frac{2 hc y}{\pi a k T}$$

$$\rho_2 = \frac{r2}{f} = \frac{2 hc y^2}{\pi a k T}$$

connaissant a pourvu que $50º < U_m < 78º$. Les résultats relatifs à des miroirs de différentes classes sont les suivants :



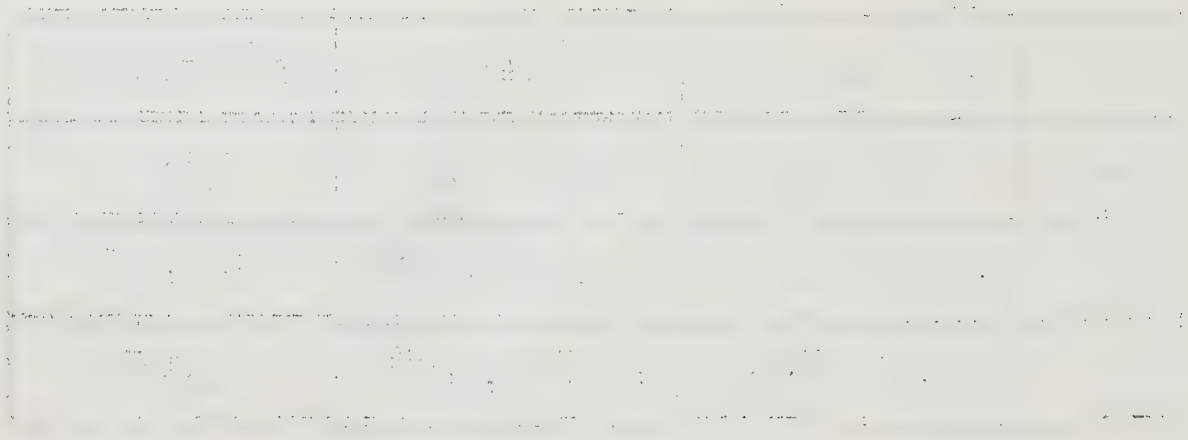
a	1ère Classe	2ème Classe	3ème Classe
(mm)	0,1 0,06	0,05 0,01	0,008
1	$0,27.10^{-2}$ $0,46.10^{-2}$	$0,52.10^{-2}$ $2,7.10^{-2}$	$3,40.10^{-2}$
2	$0,54.10^{-2}$ 10^{-2} 0,92	$1,0.10^{-2}$ $5,4.10^{-2}$	$6,8.10^{-2}$

Comparant les valeurs de ρ_1 et ρ_2 avec celle du rayon de l'image de Gauss du soleil (ou de la lune en période pleine lune) définie par $\rho = \frac{r}{p} = 0,465.10^{-2}$ l'on voit que pour les miroirs de la première classe la distance au foyer du minimum de la densité d'énergie dans le plan focal coïncide sensiblement avec le rayon de l'image idéale , le maximum se situant à une distance double .

c) Importance relative des deux premiers extréma secondaires de la courbe théorique de répartition de l'énergie dans le plan focal .

La convergence très lente du développement en série de la densité d'énergie du rayonnement concentré dans le plan focal ne permet un calcul direct effectif de $\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}(\varphi) = \frac{I(r)}{I_o}$ que pour des valeurs suffisamment faibles de y (ou de r) .

Dans le domaine des valeurs de y correspondant au minimum , il faut déjà recourir à la technique de la transformation d'EULER pour obtenir un développement qui converge avec une rapidité suffisante : posant $Y = \frac{Z^2}{1 + Z^2}$, $Z = 10y$ on obtient alors successivement



$$\mathcal{E}(Z) = e'_o - e'_1 Z^2 + e'_2 Z^4 - e'_3 Z^6 + \ldots\ldots + (-1)^p e'_p Z^{2p} + \ldots\ldots$$

$$e'_o = e_o = I \quad e'_1 = 10^{-2} e_1 \quad e'_2 = 10^{-4} e_2 \ldots\ldots e'_p = 10^{-2p} e_p \ldots\ldots$$

$$\mathcal{E}(Y) = (I-Y)\left[e'_o + \delta e'_o\, Y + \delta^2 e'_o\, Y^2 + \ldots\ldots + \delta^p e'_o\, Y^p + \ldots\ldots\right]$$

$$\delta e'_o = e'_o - e'_1 \quad \delta e'_p = e'_p - e'_{p+1} \quad \delta^n e'_p = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_k^n e'_{p+k}$$

Le dernier développement en série , contrairement à l'expression initiale de $\mathcal{E}(y)$ converge assez rapidement tant que $Y = \frac{Z^2}{1+Z^2}$ ne prend pas des valeurs trop voisines de l'unité , mais ne permet plus un calcul sûr dès que $Y \longrightarrow 1$, à moins de prendre en considération un nombre très important de termes .

Aussi le calcul numérique de la valeur de la densité d'énergie correspondant au premier maximum secondaire a-t-il effectué à partir de l'expression de $\mathcal{E}(r)$ découlant de l'utilisation du développement asymptotique de $\frac{J_1(m)}{m}$

$$J_1(Z) = \left(\frac{2}{\pi Z}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (\sin Z - \cos Z)\left(1 - \frac{3}{128\, Z^2} + \frac{35}{32768\, Z^4} + \right. \\ \left. + (\sin Z + \cos Z)\left(\frac{3}{8\, Z} - \frac{35}{1024\, Z^3} + \ldots\ldots\right)\right) \end{array} \right.$$

$$\frac{J_1^2(Z)}{Z^2} = \frac{1}{\pi Z^3} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (1-\sin^2 Z)\left(1 - \frac{3}{64\, Z^2} + \frac{11}{4096\, Z^4} + \ldots\right) \\ + (1+\sin^2 Z)\left(\frac{9}{64\, Z^2} - \frac{105}{4096\, Z^4} + \ldots\ldots\right) \\ - 2\cos^2 Z \left(\frac{3}{8\, Z} - \frac{11}{256\, Z^3} + \ldots\ldots\right) \end{array} \right.$$

Utilisant les premiers termes du développement en série de sin et cos on obtient pour $\frac{J_1^2(m)}{m^2}$ le développement asymptotique :

$$\frac{J_1^2(m)}{m^2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{m^3} - \frac{74359}{98304}\,\frac{1}{m^2} + \frac{103}{120}\right]$$

$$m = 2\varrho\sqrt{1 - \sin^2 u \cos^2\varphi}\;;\quad \varrho = 2\eta\cos^3\frac{u}{2}\;;\quad \eta = \frac{\pi a}{\lambda}\cdot\frac{r}{p}$$

L'intégration en φ de l'expression de $\frac{J_1^2(m)}{m^2}$ conduit aux intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{d\varphi}{\left[1-\cos^2 u \cos^2\varphi\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\cos^2 u}\,E(\sin u)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{d\varphi}{1 - \sin^2 u \cos^2\varphi} = \frac{\pi}{2\cos u}$$

$E(k)$ désignant l'intégrale elliptique complète de LEGENDRE de première espèce . On obtient finalement , après intégration en u et en tenant compte du passage du cas de diffraction au voisinage du foyer à celui de diffraction à l'infini .

$$d\,I_\lambda(r) = \frac{d\,I_\lambda(o)}{\Omega_o}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{8\pi\eta^3}\displaystyle\int_0^{U_m}\frac{E(\sin u)\,\sin\frac{u}{2}\,\frac{du}{2}}{\cos u\cos^7\frac{u}{2}} \\ -\dfrac{3}{16\,\eta^2}\displaystyle\int_0^{U_m}\sin\frac{u}{2}\cos^2\frac{u}{2}\,\frac{du}{2} \\ +\dfrac{1247}{360}\displaystyle\int_0^{U_m}\sin\frac{u}{2}\cos^2\frac{u}{2}\cos u\,\frac{du}{2} \end{array}\right\}$$

L'intégration par rapport à η conduit pour $\mathcal{E}(r)$ à l'expression

$$\mathcal{E}(r) = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{480\,\pi^2}\,\dfrac{\Delta_2}{\Delta^5}\left\{\displaystyle\int_0^{U_m}\frac{E(\sin u)\,\sin\frac{u}{2}=\frac{du}{2}}{\cos u\cos^7\frac{u}{2}}\right\}\frac{h^3\,c^3}{(\pi a k T\frac{r}{p})^3} \\ -\dfrac{(1-\cos^3\frac{U_m}{2}}{320\,\pi}\,\dfrac{\Delta_3}{\Delta^5}\cdot\frac{1}{\Omega_o}\cdot\frac{h^2\,c^2}{(\pi a k T\frac{r}{p})^2} \\ +\dfrac{1247}{1440\,\pi} \end{array}\right]$$

Avec $a = 0{,}05\text{mm}$ $T = 5200^\circ$ K $\quad \frac{r}{p} = \frac{r_1}{2f} = 0{,}465.10^{-2}$

On trouve une valeur numérique du maximum secondaire pratiquement indépendante de l'angle d'ouverture du miroir parabolique considéré et sensiblement égale à $\frac{1247}{1440\,\pi} = 27{,}6\ \%$ du maximum central résultat qui concorde de façon satisfaisante avec ceux obtenues précédemment en utilisant une méthode différante de calcul .

Les valeurs de $\mathcal{E}(y_1)$ et de $\mathcal{E}(y_2)$ ont été calculées par les deux méthodes décrites , les développements des $\mathcal{E}(Z)$ étant les suivants :

1º) $U_m = 40^\circ$: $\mathcal{E}(Z) = 1 - 0{,}8421\ Z^2 + 0{,}4220\ Z^4 - 0{,}1491\ Z^6 +$
$+ 0{,}04119\ Z^8 - 0{,}009192\ Z^{10} + 0{,}002113\ Z^{12} - 0{,}0007484\ Z^{14} +$
$+ 0{,}000222\ Z^{16} + ...$

2º) $U_m = 50^\circ$: $\mathcal{E}(Z) = 1 - 0{,}7179\ Z^2 + 0{,}3351\ Z^4 - 0{,}11843\ Z^6 +$
$+ 0{,}03416\ Z^8 - 0{,}008096\ Z^{10} + 0{,}001975\ Z^{12} - 0{,}0007341\ Z^{14} +$
$+ 0{,}0002625\ Z^{16} + ...$

3º) $U_m = 62^\circ$: $\mathcal{E}(Z) = 1 - 0{,}5999\ Z^2 + 0{,}2825\ Z^4 - 0{,}1093\ Z^6 +$
$+ 0{,}03451\ Z^8 - 0{,}008715\ Z^{10} + 0{,}0002205\ Z^{12} - 0{,}0008384\ Z^{14} +$
$+ 0{,}0002614\ Z^{16} + ...$

4º) $U_m = 70^\circ$: $\mathcal{E}(Z) = 1 - 0{,}5558\ Z^2 + 0{,}2804\ Z^4 - 0{,}1165\ Z^6 +$
$+ 0{,}03820\ Z^8 - 0{,}009800\ Z^{10} + 0{,}002496\ Z^{12} - 0{,}0009505\ Z^{14} +$
$+ 0{,}0002972\ Z^{16} + ...$

On a également utilisé le résultat suivant : $\mathcal{E}'(y)$ s'annulant pour

$$y = y_o \neq o \Rightarrow - e_1 y_1 + 2\, e_2 y_1^3 - 3\, e_3 y_1^5 + \ldots + (-1)^p p\, e_p\, y_1^{2p-1} + \ldots = o$$

Donc

$$- e\, y_1^2 + 2\, e_2\, y_1^4 - 3\, e_3\, y_1^5 + \ldots + (-1)^p p\, e_p\, y_1^{2p} + \ldots = o$$

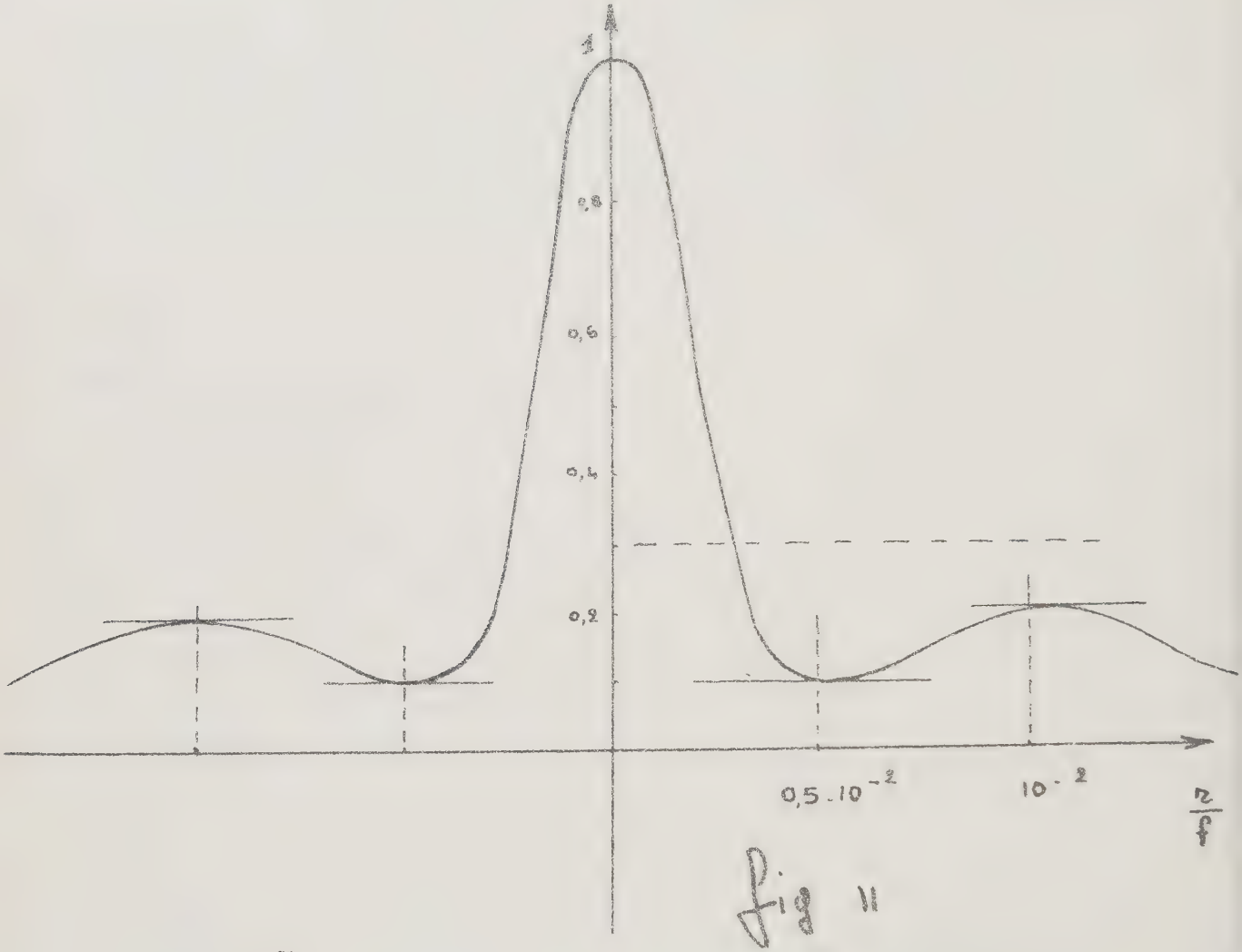


Fig 11

En additionnant cette expression à $\mathcal{E}(y_1)$ on obtient

$$\mathcal{E}(y_1) = e_o - 2\, e\, y_1^2 + 3\, e_2\, y_1^4 - 4\, e_3\, y_1^6 + \ldots + (-1)^p (p+1) e_p\, y_1^{2p} + \ldots$$

Cette dernière forme , valable seulement pour $y = y_1$ (ou y_2) converge encore plus rapidement que la première après application de la transformation d'Euler .

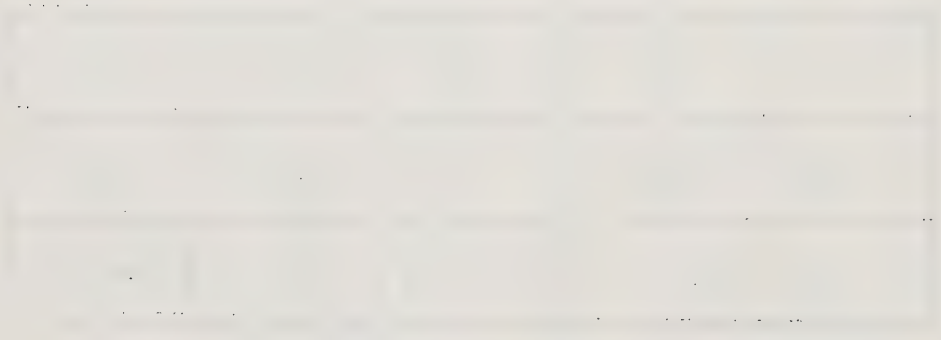
Valeurs théoriques approchées de l'intensité relative

U_m	40º	50º	62º	70º
min	0,14		0,10	0,10
max	0,276	0,276	0,276	0,276

En tenant compte du caractère approché de ces résultats (particulièrement de ceux relatifs au maxima secondaires) on peut conclure que les minima correspondent à une intensité de l'ordre de 10 à 15 % de la valeur maximum principale , alors que pour les maxima secondaires elle est d'environ 20 à 27 % de cette même valeur . La courbe théorique présente ainsi , pour des miroirs paraboliques précis l'allure de la figure II

REMARQUE : Les ordres de grandeur des valeurs de l'intensité au voisinage des extrema secondaires peuvent être obtenus par une méthode différente de la précédente : en utilisant pour $\frac{J_1(m)}{m}$ le développement en série de fonctions de Bessel déduit de

$$2\, \frac{J_1(k\,x)}{k\,x} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_2F_1\,(n\ ,\ -n\ ;\ 2\ ;\ k^2)\ .\ J_{2n}(x)$$



où $$ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma ; x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p (\beta)_p}{(\gamma)_p \cdot p!} x^p $$

$$ (\alpha)_p = \alpha(\alpha+1).....(\alpha+p-1) \quad ; \quad (\alpha)_o = 1 $$

on obtient l'expression de $dI_\lambda(r)$ sous la forme

$$ d I_\lambda(r) = 3 \left[\frac{\pi a}{\lambda}\right]^2 E_\lambda \; R_\lambda \mathcal{O}_o \; tg^2 \frac{U_m}{2} \; \frac{\cos^3 \frac{U_m}{2}}{1 - \cos^3 \frac{U_m}{2}} \quad x $$

$$ \int_{\cos \frac{U_m}{2}}^{\cos \frac{U_o}{2}} t^2(2t^2-1)dt \; \Big| \; \left\{J_o^2(Z)+2\, J_o(Z)\, J_2(Z)+J_2^2(Z)+2\, J_4(Z)J_o(Z)+...\right\} \mathcal{Y}_o $$
$$ - \left\{ J_o(Z)\, J_2(Z)+4\, J_o(Z)\, J_4(Z)+...\right\} \mathcal{Y}_1 . \cos^6 \frac{u}{2} $$
$$ + \left\{ \frac{1}{4} J_2^2(Z) - \frac{1}{2} J_o(Z)\, J_4(Z)+....\right\} \mathcal{Y}_2 . \cos^{12} \frac{u}{2} + .. $$

$$ Z = \frac{4\pi a}{\lambda} \quad \frac{r}{p} = \frac{2\pi a}{\lambda} \quad \frac{r}{f} \quad ; \quad \mathcal{Y}_p = \int_o^{\pi} (1-\sin^2 u \cos^2 \psi)^p \; d\psi $$

expression qui devient minimum quand $Z \simeq Z_{o1}$ première racine de $J_o(Z)$ et maximum pour $Z \simeq Z_{o2}$ abcisse du premier maximum de $J_o^2(Z)$, pour lequel $J_o(Z_{o2}) \simeq - J_2(Z_{o2})$.

En utilisant les valeurs des intégrales

$$ \mathcal{O}_p = \int_{\cos \frac{m}{2}}^{I} t^{6p+2}(2t^2 - 1)\, \mathcal{Y}_p(t)\, dt $$

on obtient pour les valeurs du minimum et du maximum secondaire pour les radiations de longueur d'onde λ

$$ \frac{I}{I_o} \text{ mim } \simeq 11\% \qquad \frac{I}{I_o} \text{ max } \simeq 22\% $$

Tenant alors compte des particularités de la courbe de répartitio spectrale de l'énergie du rayonnement solaire (environ 40% de l'énergie dans le visible et autant dans le proche infra rouge) o est conduit à conclure que la courbe théorique présentera égaleme un minimum et un maximum secondaires pour l'intensité , avec des

valeurs respectives sensiblement égale (minimum) et supérieure (maximum) à celles des résultats précédents : 10 à 15% de l'intensité maximum pour le minimum , 15 à 25% pour le maximum .

d) Conclusions

Dans le cas de miroirs paraboliques à macro-géométrie parfaite , l'hypothèse simplificatrice d'un rayonnement incident à géométrie cylindrique et de révolution autour de l'axe du miroir mais présentant les caractéristiques énergétiques du rayonnement solaire , conduit à une courbe théorique de répartition de l'énergie dans le plan focal remarquable par la présence , en dehors du maximum central , d'un minimum et d'un deuxième maximum secondaire . La position par rapport au foyer géométrique et l'importance relative de ces deux extrema devant le maximum principal (central) dépendent essentiellement , dans les limites courantes de variation des caractéristiques énergétiques du rayonnement solaire , incident de la micro-structure (qualité optique) de la surface réflectrice (dimension moyenne des grains de relief) et à un degré bien moindre , de l'ouverture angulaire du miroir . Pour des miroirs paraboliques à surface réflectrice de qualité optique comparable à celle des projecteurs de D.C.A. les plus précis , le calcul place approximativement le minimum sur le bord de l'image de Gauss du soleil ($\frac{r}{f} \simeq 0{,}5.10^{-2}$) et le maximum à une distance sensiblement double de la précédente ($\frac{r}{f} \simeq 10^{-2}$) et fixe leurs ordres de grandeur respectifs à 10 - 15% et 15 - 25% du maximum principal .

L'assimilation , en première approximation , de la géométrie du rayonnement solaire ou lunaire incident à celle d'un faisceau rigoureusement cylindrique permet de généraliser les conclusions précédentes au cas des miroirs paraboliques réels les

plus précis et conduit aussi à prévoir l'existence d'un minimum et d'un maximum secondaire définis en position et en importance relative par les résultats précédents .

En dehors de toute confrontation quantitative des résultats théoriques et expérimentaux (qui sera entreprise ultérieurement) on notera leur concordance qualitative frappante (mesures de R. APARISSI discutées dans la première partie , mesures effectuées à Mont-Louis dans le cadre du présent travail) .

E) Obtention d'une approximation de type exponentiel pour la partie centrale de la courbe théorique de répartition de l'énergie dans le plan focal .

L'allure exponentielle des courbes expérimentales de répartition de l'énergie dans le plan focal - du moins dans leur zone centrale - a déjà été soulignée . Retrouvant la même particularité sur la courbe théorique de l'approximation précédente , nous examinerons la possibilité d'obtenir une approximation de type exponentiel utilisable pour la description des phénomènes dans la zone centrale de la tâche focale ($\frac{r}{f} \leqslant 0{,}5 \ 10^{-2}$ dans le cas de des miroirs paraboliques les plus précis). Une telle approximation par sa simplicité analytique présente des avantages pratiques certains et de plus , elle correspond à un traitement théorique développé une des basez entièrement différentes , par R. APARISSI[12].

1º) Calculs et résultats préliminaires

L'introduction de termes exponentiels dans le développement de $\frac{J_1(m)}{m}$ peut se faire en exprimant la fonction de Bessel par une série de polynômes de Laguerre :[13]

$$\sum_{n=0} \frac{L^{\alpha}_{n}(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)} t^n = e^t (tx)^{-\frac{\alpha}{2}} . J_{\alpha}(2\sqrt{tx})$$

Avec $t = y^2$ $x = u^2$ il vient pour $\alpha = 1$

$$\frac{J_1(2\,y\,u)}{y\,u} = \frac{2\,J_1(2yu)}{2yu} = e^{-y^2} \times \sum_{n=o} \frac{L^1_n(u^2)\, y^{2n}}{(n+1)\,!}$$

$$4\,\frac{J_1^2(2yu)}{(2yu)^2} = e^{-2y^2} \sum_{p=o} \sum_{p=o} \frac{L^1_p(u^2)\, L^1_{p'}(u^2)\, y^{2(p+p')}}{(p+1)\,!\;\;(p'+1)\,!}$$

$$L^1_p(z) = \sum_{k=o}^{p} \frac{(p+1)!}{(k+1)!}\;\frac{(-1)^k z^k}{k!(p-k)!} = \sum_{k=o}^{p} (-1)^k\, C^{p-k}_{p+1}\;\frac{z^k}{k!}$$

$$4\,\frac{J^2(2yu)}{(2yu)^2} = e^{-2y^2} \times \sum_{p=o}^{\infty}\;\sum_{p'=o}^{\infty}\left(\sum_{r=o}^{p}\;\sum_{r'=o}^{p} (-1)\,\frac{C^{p-r}_{p+1}\,C^{p'-r'}_{p'+1}\,2(r+r)}{r\,!\;r'\,!}\;\frac{u\;y^{2(p+p')}}{(p+1)\,!\;(p'+1)!}\right)$$

En posant

$$m = \frac{2\,\pi a}{\lambda}\;\frac{r}{p}\,(1+\cos u)\,\cos\frac{u}{2}\,\sqrt{1-\sin^2 u\,\cos^2\psi}$$

$$= 2\,v\,y$$

$$v\,y = \frac{2\,\pi a}{\lambda}\;\frac{r}{p}\,\cos^3\frac{u}{2}\,\sqrt{1-\sin^2 u\,\cos^2\psi}$$

La validité de l'approximation cherchée ne devant pas s'étendre au delà de la zone centrale de la tâche focale , on prendra

$y = \frac{\pi a}{\lambda}\,\frac{r}{p} = \eta$ (on aura alors $y < 1$ pour les miroirs les plus précis et quelque soit λ : $\frac{a}{\lambda}\,\max \sim 150$; $\frac{r}{p}\,\max \sim 0{,}25.10^{-2}$ et $\left(\frac{\pi a}{\lambda}\,\frac{r}{p}\right)\,\max \sim 1{,}2$

$$v = 2\,\cos^3\frac{u}{2}\,\sqrt{1-\sin^2 u\,\cos^2\psi}$$

Alors

$$L^1_p(v^2) = L^1_p(v_1^2 - v_2^2);\quad v_1^2 = 4\cos^6\frac{u}{2}\;;\quad v_2^2 = 4\cos^6\frac{u}{2}\,\sin^2 u\,\cos^2\psi$$

$$= e^{-v_2^2} \sum_k (-1)^k\,\frac{(-v_2^2)^k}{k\,!}\cdot L_k^{1+k}(v_1^2)$$

$$= e^{-4\cos^2\frac{u}{2}\sin^2 u\cos^2\psi} \cdot \sum_{k=o}^{p} \frac{(4\cos^6\frac{u}{2}\sin^2 u\,\cos^2\psi)^k}{k\,!} \times$$

$$\times\; L_p^{1+k}(4\cos^6\frac{u}{2})$$

D'où finalement

$$L_p^1(v^2)L_{p'}^1(v^2)=\exp(-8\cos^6\frac{u}{2}\sin^2 u\cos^2\varphi)\sum_{k=0}^{p}\sum_{k'=0}^{p'}\frac{(4\cos^6\frac{u}{2}\sin^2 u\cos^2\varphi)^{k+k'}}{k!\,k'!}$$

$$L_p^{1+k}(4\cos^6\frac{u}{2})\,L_{p'}^{1+k'}(4\cos^6\frac{u}{2})$$

L'expression de $L_p^1\ L_{p'}^1(v^2)$ et le fait que $y=\eta<1$ autorisent à ne retenir que le seul terme du développement de $4\frac{J_1^2(2vy)}{(2vy)^2}$ pour lequel $p=p'=0$

$$4\frac{J_1^2(2vy)}{(2vy)^2}=4\frac{J_1^2(m)}{m^2}\simeq e^{-2\frac{\pi^2a^2}{\lambda^2}\frac{r^2}{p^2}}$$

2º) Expression approchée de la densité d'énergie dans la zone centrale de la tâche focale

$$d_\lambda I(r)=8\pi^2 K_\lambda N\, e^{-\frac{2\pi^2a^2}{\lambda^2}\frac{r^2}{p^2}}\,d\lambda\int_{u_0}^{u_m}\sin\frac{u}{2}\cos^2\frac{u}{2}\cos u\,du$$

$$=16\pi^2 K_\lambda N\, e^{-\frac{2\pi^2a^2}{\lambda^2}\frac{r^2}{p}}\,d\lambda\int_{\cos\frac{u_m}{2}}^{\cos\frac{u_0}{2}}t^2(2t^2-1)\,dt$$

$$=4\pi^2 K_\lambda N\,\mathcal{Q}_0\, e^{-\frac{2\pi^2a^2}{\lambda^2}\frac{r^2}{p}}\,d\lambda$$

$$d_\lambda I(o)=4\pi^2 K_\lambda N\,\mathcal{Q}_0\,d\lambda$$

D'où

$$d\,I_\lambda(r)=3\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2 E_\lambda R_\lambda\,\mathcal{U}\, e^{-\frac{2\pi^2a^2}{\lambda^2}\frac{r^2}{p^2}}\,d\lambda$$

$$I(r)=3(\pi a)^2\mathcal{U}\int_{\lambda\min}^{\lambda\max}\frac{E_\lambda R_\lambda}{\lambda^2}\, e^{-\frac{2\pi^2a^2}{\lambda^2}\frac{r^2}{p^2}}\,d\lambda$$

qu'on peut écrire en appliquant le théorème de la moyenne

$$I(r)=3\left(\frac{\pi a}{\lambda_e}\right)^2 E_{\lambda e}\,R_{\lambda e}\,\mathcal{U}\,(\lambda\max-\lambda\min)\, e^{-\frac{2\pi^2a^2}{\lambda_e^2}\frac{r^2}{p^2}}$$

En toute rigueur λ_e varie avec r et la répartition spectrale de l'énergie (donc m) . Cependant , compte tenu des hypothèses faites , (zone centrale de la tâche focale donc r très

faible) et du type de déformation subie par la courbe de répartition spectrale de l'énergie quand m varie dans les limites couramment observées ($1 < m < 1,5$) on peut admettre , en première approximation que λ_e ne dépend pas de r et change peu avec m . Considérant la densité d'énergie au foyer , on détermine alors λ_e graphiquement

$$\frac{E\,\lambda_e \;\; R\lambda_e \;\; (\lambda \max - \lambda \min)}{\lambda_e^2} = \int_{\lambda min}^{\lambda max} \frac{E_\lambda \;\; R_\lambda \;\; d\lambda}{2}$$

Pour $m = 1,5$ on obtient $\lambda_e = 0,32$ et $\lambda_e = 0,88$

La densité d'énergie rapportée à sa valeur maximum a pour expression $\mathcal{E}(r) = \frac{I(r)}{I(o)} = e^{-\frac{2\pi^2 a^2 r^2}{\lambda_e^2 \rho^2}} = e^{-\frac{\pi^2 a^2 r^2}{2\lambda_e^2 f^2}}$

3º) Courbes théoriques de répartition de l'énergie dans la zone centrale de la tâche focale .

La considération de miroirs paraboliques appartenant aux différentes classes définies prédédemment conduit à des courbes théoriques d'allure nettement différenciée .

a) Miroir parabolique de 1ère classe

$$a \geqslant 0,05mm \qquad \frac{a}{\lambda_e} \geqslant \frac{50}{0,88} = 56,818$$

$$2\pi^2 \frac{a^2}{\lambda^2} \geqslant 6,372.10^4$$

b) Miroir parabolique de seconde classe

$$0,05mm > a > 0,01mm$$

$$56818 > \frac{a}{\lambda_e} > 11,364$$

$$6,372.10^4 > \frac{2\pi^2 a^2}{\lambda_e^2} > 2,49.10^3$$

c) Miroir parabolique de 3ème classe.

$$a \leqslant 0{,}01\text{mm} \quad \frac{a}{\lambda_e} \leqslant 11{,}364$$

$$2\pi^2 \frac{a^2}{\lambda_e^2} \leqslant 2{,}49.10^3$$

Les courbes de la figure 12 illustrent la variation de la densité d'énergie dans la zone centrale de la tâche focale pour les trois classes de miroir : la brutalité de la décroissance de la densité d'énergie est d'autant plus grande que la qualité optique du miroir est meilleure .

4º) Discussion des résultats et conclusions

a) On a obtenu , sans aucune hypothèse supplémentaire aux conséquences déduites du domaine choisi pour sa validité , une approximation exponentielle valable pour la zone centrale de la tâche focale du type de celle du traitement théorique de R. APARISSI. Comparant nos résultats à ceux de cet auteur , qui trouve

$$I(r) = C_1 \; e^{-C_2 r^2} \qquad \text{où}$$

$$C_1 = \frac{8}{\pi}\left(\frac{180}{\pi}\right)^2 E_o \; R \; A_{max} \; h^2$$

$$C_2 = \left[\frac{180}{\pi}\frac{h}{p}(1+\cos U_m)\right]^2$$

h étant le critère de précision de la surface du miroir dont la signification a été discutée , E_o l'intensité du rayonnement solaire incident , A max la "fonction géométrique" introduite par l'auteur , R le pouvoir réflecteur énergétique global de la surface , l'on voit que le présent traitement conduirait à une expression analogue pour I (r) si l'on avait choisi

$$y = \sqrt{2} \quad \cos^2 \frac{u}{2} \quad \frac{\pi a}{\lambda} \quad \frac{r}{p}$$

$$v^2 = 2 \cos^2 \frac{u}{2} (1 - \sin^2 u \cos^2 \psi)$$

Mais alors la condition $\eta < 1$ n'entraine plus $y = \sqrt{2}\,\eta \cos^2 \frac{u}{2} < 1$ et l'approximation faite en deviendrait plus grossière , ce qu'on vérifie effectivement en comparant nos résultats avec ceux de R. APARISSI . De plus , les paramètres physiques et géométriques intervenant dans l'expression proposée pour $\mathcal{E}(r)$ ne soulèvent , contrairement au cas du critère de précision h , aucune difficulté d'interprétation .

Quoi qu'il en soit , il semble permis de considérer comme établi que le traitement théorique de R. APARISSI constitue , du moins sous l'angle des résultats , une approximation - qui peut d'ailleurs être améliorée - de celui que nous proposons . Le tableau joint donne , à titre indicatif les résultats théoriques et expérimentaux de R. APARISSI relatifs au miroir parabolique GU-2 (projecteur de D.C.A. de 2m de diamètre et 0,85m de distance focale) et les valeurs correspondantes de $\mathcal{E}(r)$ calculées d'après

$$\mathcal{E}(r) = e^{-\frac{2\pi^2 a^2}{\lambda e^2}\,\frac{r^2}{p^2}}$$

en déterminant $\frac{a}{\lambda e}$ par identification d'un point de la courbe expérimentale avec le point correspondant de la courbe théorique exponentielle .

r mm	o	0,75	2	3,75	4,8
$\eta = \frac{\pi a r}{\lambda e\ p}$	o	0,188	0,5	0,96	1,2
$\mathcal{E}_{exp}$	1	0,965	0,667	0,165	0,06
$\mathcal{E}_{th}$ (APAR.)	1	0,98	0,86	0,58	0,40
$\mathcal{E}_{th}$	1	0,955	0,610	0,160	0,057

b) L'expression de $\mathcal{E}(r)$ obtenue plus haut ne comporte aucune dépendance vis-à-vis de l'ouverture du miroir . Cette circonstance apparemment paradoxale , et plus encore l'accord d'un tel résultat avec les données expérimentales s'expliquent par l'incidence , négligeable devant celle de la diffraction des radiations par les grains de relief , de l'ouverture angulaire du miroir dont la macro-géométrie a été supposée parfaite (ce qui est pratiquement le cas des miroirs paraboliques de type projecteur de D.C.A. les plus précis) .

c) On a établi la possibilité d'obtenir une approximation de la courbe théorique de répartition de l'énergie dans le plan focal par une courbe de type exponentiel . Le domaine de validité de cette approximation est limité à la zone centrale de la tâche focale ($\frac{r}{f} \leqslant 0{,}5.10^{-2}$) et l'accord avec les résultats expérimentaux assez satisfaisant . L'inapplicabilité de l'expression correspondante de la densité d'énergie à des points de la zone périphérique de la tâche focale restreint certes notablement la portée de l'approximation exponentielle s'agissant d'une étude de la totalité de la tâche focale , sans cependant lui enlever son intérêt chaque fois que la seule zone centrale de l'image focale est prise en considération .

F) Conclusions Générales

1º) L'étude du cas particulier d'un rayonnement incident à géométrie rigoureusement cylindrique conduit à une courbe de répartition de l'énergie dans le plan focal , bien que la macro-géométrie de la surface réflectrice soit supposée parfaite . Ce qui souligne le rôle important joué par la qualité optique de la surface (dimension des grains de relief) indépendamment de tout autre facteur éventuel pouvant contribuer à l'apparition d'une répartition de l'énergie dans le plan focal : notam-

ment , la géométrie à symétrie conique de révolution du rayonnement des sources réelles (soleil , lune) , si elle peut participer à une répartition non uniforme de l'énergie du rayonnement concentré dans le plan focal d'un miroir parabolique à macro-géométrie parfaite , n'apparaît pas comme une condition sine qua non.

2º) Malgré l'approximation que constitue l'assimilation à première vue abusive des rayons incidents à un faisceau rigoureusement parallèle , les résultats théoriques s'accordent de façon satisfaisante avec les résultats expérimentaux relatifs aux miroirs paraboliques les plus précis (type projecteur de D.C.A) dont la macro-géométrie s'approche le plus de l'hypothèse de la perfection .

Un tel résultat semble pouvoir se justifier par le fait que l'ordre de grandeur des dimensions moyennes des grains de relief pour ce type de miroirs (a $\sim$ 0,5 à 0,1mm) conduit à des distances angulaires de diffraction qui sont grandes devant le diamètre angulaire du soleil ou de la lune : $\frac{\lambda}{a}$ varie entre $0{,}66.10^{-2}$ (pour $\lambda = 0{,}33$) et 5.10^{-2} (pour $\lambda = 2{,}5\ \mu$) sa valeur moyenne étant de l'ordre de $1{,}2.10^{-2}$ (pour le visible) et $2{,}5.10^{-2}$ (pour l'infrarouge) qui transportent 90% environ de l'énergie du rayonnement incident .

3º) La courbe théorique de répartition de l'énergie présente deux extrema sensibles (un minimum et un maximum secondaire) dont la position et l'importance relative dépendent essentiellement de la qualité optique du miroir , à un moindre degré de son ouverture angulaire . Pour les valeurs généralement réalisées du rayon moyen des grains de relief des résultats du calcul concordent avec ceux des mesures relatives aux miroirs paraboliques précis , tant sur le plan qualitatif (allure générale) que quantitatif (à condition de s'en tenir à la variation de la densité d'énergie réduite $\mathcal{E}(r) = \frac{I(r)}{Im}$. Les valeurs

calculées de l'intensité maximum Im observable au foyer géométrique sont sensiblement plus fortes que celles observées expérimentalement , les écarts étant de l'ordre de 10 à 20% . Cette circonstance semble devoir correspondre à l'influence , sur la répartition de l'énergie dans le plan focal , du diamètre apparent non nul de la source du rayonnement incident dans les conditions effectives de fonctionnement des miroirs réels : le non aplanétisme du miroir parabolique et la diffraction par les grains de relief de la surface ont pour conséquence , à énergie transportée égale et à répartition spectrale identique pour le rayonnement incident , une diminution de l'énergie renvoyée vers un point donné de la tâche focale dans le cas d'une source réelle par rapport au cas de rayons incidents parallèles .

4º) En se limitant à la zone centrale de la tâche focale , il est possible d'obtenir une approximation de la loi de variation de la densité d'énergie par une courbe exponentielle donnant une représentation satisfaisante des résultats expérimentaux et constituant une amélioration de la courbe théorique résultant du traitement de R. APARISSI .

Ainsi se trouve justifié l'intérêt a priori discutable de l'examen du cas particulier et apparemment "irréel" de rayons incidents rigoureusement parallèles entre eux et à l'axe du miroir parabolique étudié .

. ETUDE THEORIQUE DE LA REPARTITION DE L'ENERGIE DU RAYONNEMENT D'UNE SOURCE REELLE (DIAMETRE APPARENT NON NUL) DANS LE PLAN FOCAL D'UN MIROIR PARABOLIQUE A MACRO-GEOMETRIE PARFAITE .

Les calculs développés jusqu'ici assimilaient la source du rayonnement incident (soleil , lune) à une source ponctuelle . Quel que soit l'accord observé des résultats théoriques

obtenus avec les données expérimentales (allure générale de la courbe de variation de la densité d'énergie en valeur absolue ou rapportée à la densité maximum , ordre de grandeur de cette dernière , position et importance relative respectives du minimum et du maximum secondaire , représentation satisfaisante de la zone centrale de la tâche focale par une courbe exponentielle) l'appréciation du rôle joué par le diamètre apparent de la source dans la détermination de la répartition de l'énergie du rayonnement concentré dans le plan focal implique nécessairement l'examen du cas général actuel .

A) Remarques et calculs préliminaires

1º) Rappelons que la contribution à la densité d'énergie en un point du plan focal à la distance r du foyer des radiations de longueur d'onde comprise entre λ et $\lambda + d\lambda$ a pour expression

$$I_\lambda(r) = 4\pi K_\lambda \, d\lambda$$

$$\left[\int_{U_o}^{U_m} \sin\frac{u}{2} \cos^2\frac{u}{2} \cos u \, du \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{p \sin\varphi_o}{1+\cos u}} \sum_{m,n} 16 \, Pmn \, \frac{2\ell \, d\ell}{p^2 \sin^2\varphi_o / (1+\cos u)^2} + \right.$$

$$\left. \int_{U_o}^{U_m} \sin\frac{u}{2} \cos^2\frac{u}{2} \cos u \, du \int_0^{2\pi} d\psi \int_{p \sin\varphi_o}^{\frac{p \sin\varphi_o}{\cos u (1+\cos u)}} 2\ell d\ell \sum_{m,n} 16 \, Pmn \, \frac{2}{\pi} \frac{\Upsilon a \Upsilon b \cdot A \cos v}{p^2 \sin^2\varphi_o / (1+\cos u)^2} \right]$$

avec

$$v = \frac{\cot g \, u}{\ell} \sqrt{\frac{p^2 \sin^2\varphi_o}{(1+\cos u)^2 \cos^2 u} - \ell^2}$$

$$\Upsilon b = \Upsilon\left(\ell - \frac{p \sin\varphi_o}{1+\cos u}\right)$$

$$\Upsilon a = \Upsilon\left[\frac{p \sin\varphi_o}{\cos u \, (1+\cos u)} - \ell\right]$$

$$P_{mn} = \begin{cases} (m+1)(n+1)\, C_m^1(\cos\chi)\, C_n^1(\cos\chi)\, (1+K)^{-\frac{m+n+4}{2}}\, \dfrac{J_{m+1}(z) J_{n+1}(z)}{z^2} \\ \displaystyle\sum_{p=0} \sum_{p'=0} \dfrac{\left(\frac{1}{2} K X\right)^{p+p'}}{p!\,p'!}\, \dfrac{J_{m+1-p}(X)\, J_{n+1-p'}(X)}{X^2} \end{cases}$$

$$K = -\sin^2 u \cos^2\psi \; ; \quad X = k\, a \cos\frac{u}{2}\,\frac{r}{\rho} = \frac{2\pi a}{\lambda}\,\frac{r}{p}\,(1+\cos u)\cos\frac{u}{2}$$

$$z = k\, a\,\frac{\ell}{\rho}\cos u \cos\frac{u}{2} = \frac{2\pi a}{\lambda}\,\frac{\ell}{p}\,(1+\cos u)\cos u\cos\frac{u}{2}$$

$$\ell = \frac{\rho \sin\psi}{\cos u} = \frac{p \sin\psi}{\cos u\,(1+\cos u)} \qquad (\psi \leqslant \psi_0)$$

$$\cos\chi = \frac{\cos u \cos\psi}{\sqrt{1-\sin^2 u \cos^2\psi}}$$

$$C_k^1(x) = \sum_{r=0}^{k/2} (-1)^r\, \frac{2^{k-2r}\,(k-r)!\; x^{k-2r}}{(k-2r)!\; r!}$$ étant les polynômes de Gegenbauer définis par

$$(1 - 2x\,h + h^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^1(x)\, h^n \; ; \quad \left[|x| \;,\; |h| < 1\right] .$$

Ce développement de $dI_\lambda(r)$ correspond à une séparation des différentes variables d'intégration . Or on peut remarquer que P_{mn} considéré comme fonction de $\cos\chi$ a la même parité que le produit $C_m^1(\cos\chi)\; C_n^1(\cos\chi)$, d'où il résulte que les P_{mn} tels que $m+n = 2\ell + 1$ $(\ell = 0,1,2,.....)$ conduisent à un résultat nul lors de l'intégration en ψ . Dans les calculs , on se restreindra donc aux seuls P_{mn} pour lesquels $m+n=2\ell$. Le résultat signalé peut également se déduire directement de la parité de $\frac{J_1^2(m)}{m^2}$ en m , donc en ψ , ou de celle de $dI_\lambda(r)$ en r , donc en X .

2º) On peut faire les remarques suivantes :

a) L'intégration par rapport à la variable conduit au calcul d'intégrales du type :

$$\mathcal{J}(m,n;p,p') = \int_0^{\pi} \frac{(\sin^2 u \cos^2\psi)^{p+p'}\, d\psi}{(1-\sin^2 u \cos^2\psi)^{\frac{m+n+4}{2}}} = \mathcal{J}(m+n\ ;\ p,p')$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\sin^2 u \cos^2\psi)^{p+p'}\, d\psi}{(1-\sin^2 u \cos^2\psi)^{\ell+2}} \qquad (m+n = 2\ell)$$

que le changement de variable $\operatorname{tg}\psi = t \cos u$ permet de ramener aux intégrales classiques

$$\int_0^{\infty} \frac{dv}{(1+v^2)^k}$$

On a en effet

$$\mathcal{J}(\ell,p,p') = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin^2 u \cos^2\psi)^{p+p'}\, d\psi}{(1-\sin^2 u \cos^2\psi)^{\ell+2}}$$

$$= 2 \sin^{2(p+p')} u \int_0^{\infty} \frac{(1+y^2)^{\ell+1-p-p'}\, dy}{(\cos^2 u+y^2)^{\ell+2}} \qquad (y=\operatorname{tg}\psi)$$

Si $\ell+1 \geqslant p+p'$ il suffit de développer $(1+y^2)^{\ell+1-p-p'}$ sous la forme $\left[\sin^2 u + (\cos^2 u + y^2)\right]^k$ pour se ramener au résultat annoncé. Si $\ell+1 < p+p'$ la décomposition de la faction rationnelle en y^2 de la forme $\frac{1}{(1+y^2)^k\,(\cos^2 u+y^2)^{\ell+2}}$ ramène alors au même résultat.

b) L'intégration par rapport à ℓ fait intervenir des intégrales de l'un des types

$$(1) \qquad \int_0^{\ell m} \frac{J_n^2(k\,Z)}{(k\,Z)^2}\, Z\, dZ = \frac{1}{k^2}\int_0^{k\ell m} \frac{J_n^2(v)\, dv}{v}$$

$$= -\frac{1}{k^2}\,\frac{1}{2n}\left[J_n^2(v) + 2\sum_{r=1}^{m} J_{n+r}^2(v)\right] = -\frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{2n}\left[J_o^2(v) - J_n^2(v) + 2\sum_{r=1}^{n} J_r^2(v)\right]_0^{k\ell m}$$

$$(2)\quad \int_0^{\ell_m} \frac{Jp\,(k\,Z)\;Jq\,(k\,Z)}{(k\,Z)^2}\;Z\;dZ = \frac{1}{k^2}\int_0^{k\ell_m} \frac{Jp(v)\;Jq(v)}{v}\;dv$$

$$= \frac{1}{p+q}\left[\,2\sum_{\tau=1}^{n} Jp+r(v)\;Jq+r(v)+Jp(v)\;Jq(v) - Jp+n(v)\;Jq+n(v)\right]_0^{k\ell_m} +$$

$$+\;\frac{p+q+2n}{p+q}\;\cdot\;\frac{1}{k^2}\int_0^{k\ell_m} \frac{Jp+n(v)\;Jq+n(v)}{v}\;dv$$

$$(3)\quad \int_{\ell_a}^{\ell_b} \frac{J_n^2(k\,Z)}{(k\,Z)^2}\;Z\;dZ\;.\;\text{Arc sin}\left[\frac{\cot g\;u}{Z}\sqrt{\frac{p^2\sin^2\varphi_o}{\cos^2 u(1+\cos u)^2} - Z^2}\right]\Psi_a(Z)\Psi_b(Z)$$

$$(4)\quad \int_{\ell_a}^{\ell_b} \frac{Jp(k\,Z)Jq(k\,Z)}{(k\,Z)^2}\;Z\;dZ\;\;\text{Arc sin}\left[\frac{\cot g\;u}{Z}\sqrt{\frac{p^2\sin^2\varphi_o}{\cos^2 u(1+\cos u)} - Z^2}\right]\Psi_a(Z)\Psi_b(Z)$$

Les intégrales du type (3) et (4) peuvent être exprimées en utilisant les relations précédentes dans des intégrations par parties avec

$$U = \text{Arc sin}\left[\frac{\cot g\;u}{\ell}\sqrt{\frac{p^2\sin^2\varphi_o}{\cos^2 u(1+\cos u)^2} - \ell^2}\right]$$

$$V = \int \frac{Jp(kZ)Jq(kZ)}{(kZ)^2}\;Z\;dZ \quad \text{ou} \int \frac{J_n^2(kZ)}{(k\,Z)^2}\;ZdZ \text{ selon le cas}$$

c) Dans la pratique on devra se contenter d'un nombre fini de termes Pmn ($m+n = 2\ell$) correspondant à l'approximation compatible avec la précision désirée . Remarquant que dans l'expression de Pmn figurent les produits

$$\frac{Jm+1(Z).Jn+1(Z)}{Z^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{Jm+1(Z).Jn+1(Z)}{Z^2}$$

où $Z = ka\,\frac{\ell}{\rho}\cos u \cos\frac{u}{2} = ka\cos\frac{u}{2}\sin\varphi$ ($\varphi \leqslant \varphi_o = 0{,}5.10^{-2}$)

et $Z = ka\,\frac{r}{\rho}\cos\frac{u}{2}\sqrt{1 - \sin^2 u\cos^2\varphi}$

ont des ordres de grandeur variant entre $\frac{2\pi a}{\lambda max}\sin\varphi_o$ et $\frac{2\pi a}{\lambda min}\sin\varphi_o$

soit 0,628 et 3,925 pour z dans le cas où $\varphi = \varphi_o$ et a=0,05mm
0 et 7,85 pour Z , on conclut que pour $2\ell+2=m+n+2>4$ l'ordre de grandeur de Pmn sera négligeable devant les termes précédents en raison des valeurs très faibles prises par les fonctions de Bessel Jm+1 et Jn+1 pour $m+n+2 > 4$ dans l'intervalle de variation de Z et Z . On peut donc espérer obtenir I(r) avec une approximation suffisante en se tenant aux termes P_{oo} , P_{11} , $P_{o2} = P_{2o}$.

3º) Calcul effectifs des P_{mn} $(m+n = 2\ell)$

A l'étape actuelle nous garderons pour alléger l'écriture l'expression de Pmn sous la forme

$$Pmn = (m+1)(n+1)\, C_m^1(\cos\chi)\, C_n^1(\cos\chi)\, \frac{Jm+1(Z)Jn+1(Z)}{Z^2}\, \frac{J_{n+1}(z)J_{n+1}(z)}{z^2}$$

$$\left(Z = ka\,\frac{r}{\rho}\cos\frac{u}{2}\,\sqrt{1-\sin^2 u\cos^2\varphi}\;;\; z = ka\,\frac{\ell}{\rho}\cos u\cos\frac{u}{2}\right)$$

$$P_{oo} = \frac{J_1^2(Z)}{Z^2}\cdot\frac{J_1^2(z)}{z^2}$$

$$P_{11} = 4\left[C_1^1(\cos\chi)\right]^2\frac{J_2^2(Z)}{Z^2}\cdot\frac{J_2^2(z)}{z^2} = 16\cos^2\chi\,\frac{J_2^2(Z)}{Z^2}\cdot\frac{J_2^2(z)}{z^2}$$

$$P_{o2} = P_{2o} = 3\,C_2^1(\cos\chi)\,\frac{J_1(Z)\,J_3(Z)}{Z^2}\cdot\frac{J_1(z)\,J_3(z)}{z^2}$$

$$= 3\,(4\cos^2\chi - 1)\,\frac{J_1(Z)J_3(Z)}{Z^2}\cdot\frac{J_1(z)J_3(z)}{z^2}$$

$$P_{22} = 9\left[C_2^1(\cos\chi)\right]^2\,\frac{J_3^2(Z)}{Z^2}\cdot\frac{J_3^2(z)}{z^2}$$

$$= 9\,(4\cos^2\chi - 1)^2\,\frac{J_3^2(Z)}{Z^2}\cdot\frac{J_3^2(z)}{z^2}$$

$$P_{13} = P_{31} = 8\, C_1^1(\cos\chi)\, C_3^1(\cos\chi)\, \frac{J_2(Z)J_4(Z)}{Z^2}\, \frac{J_2(z)\,J_4(z)}{z^2}$$

$$= 16\cos\chi(8\cos^3\chi - 4\cos\chi)\, \frac{J_2(Z)\,J_4(Z)}{Z^2} \cdot \frac{J_2(z)J_4(z)}{z^2}$$

$$= 64\cos^2\chi(2\cos^2\chi - 1)\, \frac{J_2(Z)\,J_4^2(Z)}{Z^2} \cdot \frac{J_2(z)\,J_4^2(z)}{z^2}$$

$$P_{04} = P_{40} = 5\, C_4^1(\cos\chi)\, \frac{J_1(Z)\,J_5(Z)}{Z^2} \cdot \frac{J_1(z)\,J_5(z)}{z^2}$$

$$= 5(16\cos^4\chi - 12\cos^2\chi + 1)\, \frac{J_1(Z)J_5(Z)}{Z^2} \cdot \frac{J_1(z)\,J_5(z)}{z^2}$$

4º) Résultats de l'intégration par rapport aux variables ℓ et ψ

a) Intégration par rapport à la variable ℓ (qui sera changée en t pour plus de clarté)

En posant :

$$Z_a = ka\cos u\cos\frac{u}{2} \cdot \frac{a_u}{\rho} = ka\cos\frac{u}{2}\sin\psi_o$$

$$Z_b = ka\cos u\cos\frac{u}{2} \cdot \frac{b_u}{\rho} = ka\cos u\cos\frac{u}{2}\sin\varphi_o$$

et compte tenu des propriétés des distributions

$\Psi_b = \Psi(y-b_u)$ et $\Psi_a = \Psi(a_u-y)$ et de leurs dérivées $\Psi'_b = \delta(y-b_u)$ et $\Psi'_a = -\delta(a_u-y)$, on obtient, pour les contributions relatives aux P_{mn} successifs, les expressions ci-dessous, qui constituent des valeurs approchées par excès par suite de l'abandon d'un terme du type

$$\frac{1}{Z_b^2} \cdot \frac{2}{p+q} \int_o^\infty \frac{dt}{1+t^2} \left[J_p\left(Z_b\sqrt{\frac{1+t^2}{\cos^2 u+t^2}}\right) J_q\left(Z_b\sqrt{\frac{1+t^2}{\cos^2 u+t^2}}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{r=1} J_{p+r}\left(Z_b\sqrt{\frac{1+t^2}{\cos^2 u+t^2}}\right) J_{q+r}\left(Z_b\sqrt{\frac{1+t^2}{\cos^2 u+t^2}}\right) \right].$$

dont la valeur numérique est manifestement négligeable devant

celles des termes retenus .

$$16\,\frac{J_1^2(Z)}{Z^2}\times\frac{J_1^2(Z_b)+2\sum J_{1+r}^2(Z_b)}{Z_b^2}$$

$$128\,\frac{J_2^2(Z)}{Z^2}\times\frac{J_2^2(Z_b)+2\sum_{r=1}^{\infty}J_{2+r}^2(Z_b)}{Z_b^2}\times\cos^2\chi$$

$$48\,\frac{J_1(Z)\,J_3(Z)}{Z^2}\times\frac{J_1(Z_b)\,J_3(Z_b)+2\sum_{r=1}^{\infty}J_{3+r}(Z_b)\,J_{1+R}(Z_b)}{Z_b^2}\times(4\cos^2\chi-1)$$

$$48\,\frac{J_3^2(Z)}{Z^2}\times\frac{J_3^2(Z_b)+2\sum_{r=1}^{\infty}J_{3+r}^2(Z_b)}{Z_b^2}\times(4\cos^2\chi-1)^2$$

$$\frac{2048}{3}\,\frac{J_2(Z)J_4(Z)}{Z^2}\times\frac{2\sum J_{2+r}(Z_b)J_{4+r}(Z_b)+J_2(Z_b)J_4(Z_b)}{Z_b^2}\times$$

$$\times\ (2\cos^2\chi-1)\cos^2\chi$$

$$\frac{160}{3}\,\frac{J_1(Z)\,J_5(Z)}{Z^2}\times\frac{J_1(Z_b)J_5(Z_b)+2\sum_{r=1}^{\infty}J_{1+r}(Z_b)\,J_{5+r}(Z_b)}{Z_b^2}\times\times$$

$$(16\cos^4\chi-12\cos^2\chi+1)$$

.....

Les ordres de grandeur respectifs de $Z=ka\cos\frac{u}{2}(1+\cos u)\frac{r}{p}$ $\sqrt{1-\sin^2 u\cos^2\varphi}$ et de $Z_b = ka\cos u\cos\frac{u}{2}\sin\varphi_o$ (dont les valeurs admettent les bornes supérieures respectives $Z_m = 4kaR/p = 2kaR/f - R$ étant le rayon de l'image de Gauss de la source - et $Z_Bm = ka\sin\varphi_o$) permettent , compte tenu de la faible valeur de la fraction de l'énergie transportée par les radiations ultraviolettes ($ka\sin\varphi_o \sim 4{,}5$) , de s'en tenir aux seuls trois premiers termes , tous les autres devenant rapidemment négligeables devant eux .

b) Intégration par rapport à la variable

En développant au préalable les $J_p(Z)J_q(Z)/Z^2$ et

$J_r^2(Z)/Z^2$ en série entière de SCHLAFLI et NEUMANN on obtient successivement :

$$J_1^2(Z)/Z^2 = 1/2^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+2)!(Z/2)^{2m}}{m!\,(m+2)!\,[(m+1)!]^2}$$

$$J_2^2(Z)/Z^2 = 1/2^2\,(Z/2)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+4)!(Z/2)^{2m}}{m!\,(m+4)!\,[(m+2)!]^2}$$

$$J_1(Z)J_3(Z)/Z^2 = 1/2^2 (Z/2)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+4)!(Z/2)^{2m}}{m!\,(m+1)!\,(m+3)!\,(m+4)!}$$

$$J_3^2(Z)/Z^2 = 1/2^2 (Z)^4 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+6)!(Z/2)^{2m}}{m!\,(m+6)!\,[(m+3)!]^2}$$

$$J_2(Z)J_4(Z)/Z^2 = 1/2^2 (Z/2)^4 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+6)!(Z/2)^{2m}}{m!\,(m+2)!\,(m+4)!\,(m+6)!}$$

$$J_1(Z)J_5(Z)/Z = 1/2^2 (Z/2)^4 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+6)!(Z/2)^{2m}}{m!\,(m+1)!\,(m+5)!\,(m+6)!}$$

.....

En introduisant la variable $\eta = \pi \frac{a}{\lambda} \cdot \frac{r}{p}$ on a $Z = 4\eta \cos^3 \frac{u}{2} \sqrt{1 - \sin^2 u \cos^2 \psi}$, les résultats de l'intégration par rapport à ψ s'écrivent respectivement :

$$4\,\frac{J_1^2(Z_b)+2\sum J_{1+r}^2(Z_b)}{Z_b^2} \sum \frac{(-1)(2m+2)!\,2^{2m}\cos^{6m}\frac{u}{2}\,\eta^{2m}}{m!\,(m+2)!\,[(m+1)!]^2} \int_0^{\pi} \left[1-\sin^2 u \cos^2\psi\right]^m d\psi$$

$$\frac{J_2^2(Z_b)+2\sum J_{2+r}^2(Z_b)}{Z_b^2} \sum \frac{(-1)^m(2m+4)!\,2^{2m+2}\cos^{6m+6}\frac{u}{2}\cos^2 u\,\eta^{2m+2}}{m!\,(m+4)!\,[(m+2)!]^2} \int_0^{\pi} \left[1-\sin^2 u\cos^2\psi\right]^m \cos^2\psi\,d\psi$$

$$\frac{J_1(Z_b)J_3(Z_b)+2\sum J_{1+r}(Z_b)J_{3+r}(Z_b)}{Z_b^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^2(2m+4)!\cos^{6m+6}\frac{u}{2}}{m!\,(m+1)!\,(m+3)!\,(m+4)!} \times$$

$$\times\,\eta^{2m+2}\left[4\cos^2 u \int_0^{\pi}\left[1-\sin^2 u\cos^2\psi\right]^m \cos^2\psi\,d\psi - \int_0^{\pi}\left[1-\sin^2 u\cos^2\psi\right]^{m+1} d\psi\right]$$

$$\frac{J_3^2(Z_b)+2\sum J_{3+r}^2(Z_b)}{Z_b^2} \sum \frac{(-1)(2m+6)!\,2^{2m+4}\cos^{6m+12}\frac{u}{2}\,\eta^{2m+4}}{m!\,(m+6)!\,[(m+3)!]^2} \times$$

$$\times \left\{16\cos^4 u \int_0^{\pi}\left[1-\sin^2 u\cos^2\psi\right]^m \cos^4\psi\,d\psi - 8\cos^2 u \int_0^{\pi}\left[1-\sin^2 u\cos^2\psi\right]^{m+1}\cos^2\psi\,d\psi + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi}\left[1-\sin^2 u\cos^2\psi\right]^{m+2} d\psi\right\}$$

.....

Plus généralement , le terme relatif à P_{mn} $(m+n = 2\ell)$ à pour expression

$$\frac{16(m+1)(n+1)}{2(m+n+2)} \times \frac{J_{m+1}(Z_b)J_{n+1}(Z_b) + 2\sum J_{m+r+1}(Z_b)J_{n+r+1}(Z_b)}{Z_b^2}$$

$$\times \frac{\sum(-1)^r(2r+m+n+2)!\,2^{2r+m+n}\cos^{6r+3(m+n)}\frac{u}{2}\,\eta^{2r+m+n}}{r\,!\,(r+m+n+2)\,!\,(r+m+1)\,!\,(r+n+1)\,!}$$

$$\times \int_0^{\pi}(1-\sin^2 u\cos^2\psi)^{\frac{r+m+n}{2}}\, C_m^1\left(\frac{\cos u\cos\psi}{\sqrt{1-\sin^2 u\cos^2\psi}}\right) C_n^1\left(\frac{\cos u\cos\psi}{1-\sin^2 u\cos^2\psi}\right) d\psi$$

Les polynômes de Gegenbauer $C_n^1(x)$ s'écrivent , en posant $x = \cos\theta C_n^1(\cos\theta) = \sin(n+1)\,\theta/\sin\theta$, ce qui établit qu'ils ont n zéro réels compris entre -1 et $+1$. Cette propriété des $C_n^1(x)$ permet de conclure que pour $m+n=2\ell$=Constante la contribution des intégrales en ψ contenant des termes rectangles $(m\neq n)$ sera négligeable devant celle des intégrales contenant des termes carrés . Par ailleurs , l'ordre de grandeur des valeurs numériques prises par $Z_b = 2\pi\frac{a}{\lambda}\cos u\cos\frac{u}{2}\sin\varphi_b$ amène à s'en tenir aux seuls termes pour lesquels les $J_p(Z)$ ont des indices inférieurs à 4 . Nous ne retiendrons donc dans les résultats qui suivent que les intégrales comportant des termes carrés $(m=n)$, tels que $m+1$, $n+1 \leqslant 4$, ce qui revient à ne prendre en considération que les termes relatifs à P_{oo} , P_{11} , P_{22} , P_{33} .

B) Expression explicite de la densité élémentaire d'énergie en un point du plan focal

1º) Dans l'approximation correspondant aux conditions précisées ci-dessus , on obtient pour la densité d'énergie élémentaire en un point du point focal , au facteur $16\pi K_\lambda N d\lambda$ près , un développement en série dont les termes généraux sont :

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)(2m+2)!\,2^{2m}\eta^{2m}}{m!\,(m+2)!\,[(m+1)!]^2}\times$$

$$\times\int_{\cos\frac{u_m}{2}}^{\cos\frac{u_0}{2}} t^{6m+2}(2t^2-1)\left\{J_1^2[Z_b(t)]+2\sum_{r=1}^{\infty}J_{1+r}^2[Z_b(t)]\right\}\times I_m(t)dt\ ;$$

$$Z_b^2$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)(2m+4)!\,2^{2m+2}\,\eta^{2m+2}}{m!\,(m+4)!\,\left[(m+2)!\right]^2} \times$$

$$\times \int_{\cos\frac{u_m}{2}}^{\cos\frac{u_o}{2}} 32t^{6m+8}(2t^2-1)^3 \left\{ \frac{J_2^2(Z_b) + 2\sum_{r=1}^{\infty} J_{2+r}^2(Z_b)}{Z_b^2} \right\} \times I_{m,2}(t)\,dt$$

$$\sum_{m=0} \frac{(-1)(2m+6)!\,2^{2m+4}\,\eta^{2m+4}}{m!(m+6)!\left[(m+3)!\right]^2} \times$$

$$\times 12 \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\cos\frac{u_m}{2}}^{\cos\frac{u_o}{2}} 16t^{6m+14}(2t^2-1)^5 \frac{\left[J_3^2(Z_b)+2\sum J_{3+r}^2(Z_b)\right]}{Z_b^2} \times I_{m,4}(t)dt \\ \displaystyle -\int_{\cos\frac{u_m}{2}}^{\cos\frac{u_o}{2}} 8t^{6m+14}(2t^2-1)^5 \frac{\left[J_3^2(Z_b)+2\sum J_{3+r}^2(Z_b)\right]}{Z_b^2} \times I_{m+1,2}(t)dt \\ \displaystyle +\int_{\cos\frac{u_m}{2}}^{\cos\frac{u_o}{2}} t^{6m+14}(2t^2-1) \frac{\left[J_3^2(Z_b)+2\sum J_{3+r}^2(Z_b)\right]}{Z_b^2} \times I_{m+2,0}(t)dt \end{array} \right\}$$

.....

$$I_{m+k,2\ell}(t) = \int_0^{\pi} \left[1 - 4t^2(1-t^2)\cos^2\psi\right]^{m+k} \cos^{2\ell}\psi\, d\psi$$

Remarques :

Les termes du premier développement en série coïncident, au facteur $4\left[J_1^2(Z_b) + 2\sum_{r=1} J_{1+r}^2(Z_b)\right]/Z_b^2$ figurant sous la somme près, ($Z_b = ka\cos u \cos\frac{u}{2}\sin\varphi_o = ka\sin\varphi_o.(2t^2-1)t$ avec ceux du développement en série obtenu au chapitre précédent dans le cas de rayons incidents rigoureusement parallèles. Quand $\varphi_o \longrightarrow 0$, $\sin\varphi_o \longrightarrow 0$, $Z_b \longrightarrow 0$ et le facteur considéré devient alors égal à l'unité ; toutes les autres expressions en $J_p(Z_b)J_q(Z_b)/Z_b^2$ sont en effet nulles. On retrouve donc comme cas particulier les résultats de l'étude précédente. Les termes relatifs aux deuxième et troisième développement en série ont la signification manifeste de termes correctifs (nous n'en avons retenu que les plus importants) - en particulier, on note que

pour $r=0$ (foyer géométrique du miroir) l'expression de la densité d'énergie élémentaire devient :

$$16\,\pi^2 K_\lambda N\, d\lambda \int_{\cos\frac{v_m}{2}}^{\cos\frac{v_0}{2}} 4t^2(2t^2-1)\,\frac{\left[J_1^2(Z_b) + 2\sum_{r=1}^{\infty} J_{1+r}^2(Z_b)\right] dt}{Z_b^2(t)}$$

et l'on vérifie que pour $\sin\varphi_0 \longrightarrow 0$, on retrouve le résultat correspondant au cas de rayons incidents rigoureusement parallèles .

2º) Expression explicite de la densité d'énergie élémentaire .

La relation classique

$$1 = J_0^2(x) + 2\sum_{r=1} J_r^2(x)$$

permet d'écrire :

$$J_p^2(x) + 2\sum_{r=1}^{\infty} J_{p+r}^2(x) = 1 - J_0^2(x) - 2J_1^2(x) \ldots - 2J_k^2(x) - \ldots - 2J_{p-1}^2 - J_p^2(x)$$

On obtient finalement ainsi

$$\frac{4\left[J_1^2(Z)+2\sum_{r=1}^{\infty} J_{1+r}^2(Z)\right]}{Z^2} = \left\{ \frac{1-(Z/2)^2}{2} + \frac{5(Z/2)^4}{36} - \frac{7(Z/2)^6}{288} + \frac{7(Z/2)^8}{2400} - \frac{11(Z/2)^{10}}{43200} + \frac{143(Z/2)^{12}}{8467200} + \frac{143(Z/2)^{14}}{81285120} + \right\}$$

$$\frac{4\left[J_2^2(Z)+2\sum_{r=1}^{\infty} J_{2+r}^2(Z)\right]}{Z^2} = \left\{ \frac{(Z/2)^2}{4} - \frac{11(Z/2)^4}{9} + \frac{7(Z/2)^6}{288} - \frac{(Z/2)^8}{300} + \frac{11(Z/2)^{10}}{34560} - \frac{143(Z/2)^{12}}{12700800} + \frac{143(Z/2)^{14}}{116121600} \cdots \right\}$$

$$\frac{4\left[J_3^2(Z)+2\sum_{r=1}^{\infty} J_{3+r}^2(Z)\right]}{Z^2} = \frac{(Z/2)^4}{36} - \frac{(Z/2)^6}{96} + \frac{3(Z/2)^8}{1600} - \frac{11(Z/2)^{10}}{51840} + \frac{2431(Z/2)^{12}}{1244678400} \cdots\cdots$$

Avec $Z_b = ka\sin\varphi_0 \cos u \cos\frac{u}{2} = 2\alpha_\lambda \cos u \cos\frac{u}{2}$ $\left(\alpha_\lambda = \frac{1}{2} ka\sin(\varphi_0)\right.$ il vient :

$$\frac{4\left[J_1^2(Z)+2\sum_{r=1}^{\infty}J_{1+r}^2(Z)\right]}{Z^2}=\left\{\begin{array}{l}1-\frac{\alpha_\lambda^2}{2}\cos^2u\cos^2\frac{u}{2}+\frac{5\alpha_\lambda^4}{36}\cos^4u\cos^4\frac{u}{2}\\-\frac{7\alpha_\lambda^6}{288}\cos^6u\cos^6\frac{u}{2}+\frac{7\alpha_\lambda^8}{2400}\cos^8u\cos^8\frac{u}{2}\\-\frac{11\alpha_\lambda^{10}}{43200}\cos^{10}u\cos^{10}\frac{u}{2}+\frac{143\alpha_\lambda^{12}\cos^{12}u\cos^{12}}{8467200}\frac{u}{2}\\-\frac{143\alpha_\lambda^{14}\cos^{14}u\cos^{14}}{812851200}\frac{u}{2}+\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}$$

$$\frac{4\left[J_2^2(Z)+2\sum_{r=1}^{\infty}J_{2+r}^2(Z)\right]}{Z^2}=\left\{\begin{array}{l}\frac{\alpha_\lambda^2}{4}\cos^2u\cos^2\frac{u}{2}-\frac{\alpha_\lambda^4}{9}\cos^4u\cos^4\frac{u}{2}\\+\frac{7\alpha_\lambda^6}{288}\cos^6u\cos^6\frac{u}{2}-\frac{\alpha_\lambda^8}{300}\cos^8u\cos^8\frac{u}{2}\\+\frac{11\alpha_\lambda^{10}}{34560}\cos^{10}u\cos^{10}\frac{u}{2}+\frac{143\alpha_\lambda^{12}\cos^{12}u\cos^{12}u}{12700800}\frac{u}{2}\\+\frac{143\alpha_\lambda^{14}\cos^{14}u\cos^{14}}{116121160}\frac{u}{2}\cdots\cdots\end{array}\right\}$$

$$\frac{4\left[J_3^2(Z)+2\sum_{r=1}^{\infty}J_{3+r}^2(Z)\right]}{Z^2}=\left\{\begin{array}{l}\frac{\alpha_\lambda^4}{36}\cos^4u\cos^4\frac{u}{2}-\frac{\alpha_\lambda^6}{96}\cos^6u\cos^6\frac{u}{2}\\+\frac{3\alpha_\lambda^8}{1600}\cos^8u\cos^8\frac{u}{2}-\frac{11\alpha_\lambda^{10}}{51840}\cos^{10}u\cos^{10}\frac{u}{2}\\+\frac{2431\alpha_\lambda^{12}}{1244678400}\cos^{12}u\cos^{12}\frac{u}{2}\cdots\cdots\end{array}\right\}$$

Le calcul conduit , en plus des intégrales rencontrées lors de l'examen du cas particulier de rayons incidents rigoureusement parallèles , à considérer les intégrales suivantes :

$$\left(x=\cos\frac{U_m}{2}\quad;\quad x_o=\cos\frac{U_o}{2}\right)$$

$$\mathcal{A}_{(m,k,o)} = \int_x^{x_o} t^{6m+2+2k}(2t^2-1)^{2k+1}dt \int_o^{\pi}\left[1-4t^2(1-t^2)\cos^2\psi\right]^m d\psi$$

$$\mathcal{A}_{(m,k+1,2)} = \int_x^{x_o} t^{6m+8+2k}(2t^2-1)^{2k+3}dt \int_o^{\pi}\left[1-4t^2(1-t^2)\cos^2\psi\right]^m \cos^2\psi d\psi$$

$$\mathcal{A}_{(m,k+2,4)} = \int_x^{x_o} t^{6m+14+2k}(2t^2-1)^{2k+5}dt \int_o^{\pi}\left[1-4t^2(1-t^2)\cos^2\psi\right]^m \cos^4\psi d\psi$$

$$\mathcal{A}_{(m+1,k+1,2)} = \int_x^{x_o} t^{6m+14+2k}(2t^2-1)^{2k+3}dt \int_o^{\pi}\left[1-4t^2(1-t^2)\cos^2\psi\right]^{m+1} \cos^2\psi d\psi$$

$$\mathcal{A}_{(m+2,k,0)} = \int_x^{x_o} t^{6m+14+2k}(2t^2-1)^{2k+1}dt \int_o^{\pi}\left[1-4t^2(1-t^2)\cos^2\psi\right]^{m+2} d\psi$$

$(m = 0,1,2,3,\ldots\ldots\ ;\ k = 1,2,3,\ldots\ldots)$

Comme $\forall\ k,\ell,m \qquad \mathcal{A}_{(k,\ell,m)} \leqslant \mathcal{A}_{(k,00)} = \mathcal{A}_k$

$$= \int_{x_m}^{x_o} t^{6k+2}(2t^2-1)dt \int_o^{\pi}\left[1-4t^2(1-t^2)\cos^2\psi\right]^k d\psi$$

nous poserons

$$e_{mk\ell} = \frac{\mathcal{A}_{mk\ell}}{\mathcal{A}_m} \quad ; \quad e_{mko} = e_{mk}$$

En limitant l'expression analytique de la densité de flux énergétique à son terme principal (qui correspond à P_{oo} compte tenu de l'ordre de grandeur du paramètre Z_b et de l'ordre des fonctions de Bessel figurant dans les termes relatifs à P_{11} , P_{20} ....) la conservation de l'énergie du rayonnement réfléchi se traduit par

$$K_\lambda = 3\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2 tg^2\frac{U_m}{2}\ \frac{\cos^3\frac{U_m}{2}}{1-\cos^3\frac{U_m}{2}}\ E_\lambda\ R_\lambda\ \times$$

$$\times\left[1 + h_1\left(\frac{\pi a\sin\varphi_o}{\lambda}\right)^2 + h_2\left(\frac{\pi a\sin\varphi_o}{\lambda}\right)^4 + h_3\left(\frac{\pi a\sin\varphi_o}{\lambda}\right)^6 + \ldots\ldots\right]$$

Les h_p sont définis à partir des coefficients b_1 , b_2 , b_3,.... b_p du développement du rapport

$$\int_{\cos\frac{U_m}{2}}^{1} 4\ \frac{1 - J_o^2(Z_b) - J_1^2(Z_b)}{Z_b^2}\ \frac{dt}{t^4} \Big/ \int_{\cos\frac{U_m}{2}}^{1} \frac{dt}{t^4}$$

($Z_b = \frac{2\pi a}{\lambda}(2t^2-1)t \sin\varphi_o$) en série de puissances entières de $\frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi_o$ par les relations :

$$h_1 = -b_1 \ ;\ h_2 = -(b_2 - b_1^2) \ ;\ h_3 = -b_3 + 2b_1b_2 - b_1^3 \ ;$$

$$h_4 = -(b_4 - 2b_3b_1 + b_2^2 - b_1^4 + b_1^2b_2) \ ; \ldots\ldots$$

Le calcul donne

$$b_1 = 2\cos^3\frac{U_m}{2} - 6\,\frac{\cos^3\frac{U_m}{2}\left(1-\cos\frac{U_m}{2}\right)}{1-\cos^3\frac{U_m}{2}} + \frac{3}{2}\,\frac{\cos^2\frac{U_m}{2}\left(1-\cos\frac{U_m}{2}\right)}{1-\cos^3\frac{U_m}{2}}$$

$$b_2 = \frac{5}{36}\cdot\frac{3\cos^3\frac{U_m}{2}}{1-\cos^3\frac{U_m}{2}}\left[\begin{array}{l}\frac{16}{9}\left(1-\cos^9\frac{U_m}{2}\right) - \frac{32}{7}\left(1-\cos^7\frac{U_m}{2}\right) + \frac{24}{5}\left(1-\cos^5\frac{U_m}{2}\right)\\ -\frac{8}{3}\left(1-\cos^3\frac{U_m}{2}\right) + \left(1-\cos\frac{U_m}{2}\right)\end{array}\right]$$

$$b_3 = \frac{7}{288}\cdot\frac{3\cos^3\frac{U_m}{2}}{1-\cos^3\frac{U_m}{2}}\left[\begin{array}{l}\frac{64}{15}\left(1-\cos^{15}\frac{U_m}{2}\right) - \frac{192}{13}\left(1-\cos^{13}\frac{U_m}{2}\right) + \frac{240}{11}\left(1-\cos^{11}\frac{U_m}{2}\right)\\ -\frac{160}{9}\left(1-\cos^9\frac{U_m}{2}\right) + \frac{60}{7}\left(1-\cos^7\frac{U_m}{2}\right) - \frac{12}{5}\left(1-\cos^5\frac{U_m}{2}\right)\\ +\frac{1}{3}\left(1-\cos^3\frac{U_m}{2}\right)\end{array}\right]$$

$$b_4 = \frac{7}{2400}\cdot\frac{3\cos^3\frac{U_m}{2}}{1-\cos^3\frac{U_m}{2}}\left[\begin{array}{l}\frac{256}{21}\left(1-\cos^{21}\frac{U_m}{2}\right) - \frac{1024}{19}\left(1-\cos^{19}\frac{U_m}{2}\right) + \frac{1792}{17}\left(1-\cos^{17}\frac{U_m}{2}\right)\\ -\frac{1792}{15}\left(1-\cos^{15}\frac{U_m}{2}\right) + \frac{1120}{13}\left(1-\cos^{13}\frac{U_m}{2}\right) - \frac{448}{11}\left(1-\cos^{11}\frac{U_m}{2}\right)\\ +\frac{112}{9}\left(1-\cos^9\frac{U_m}{2}\right) - \frac{16}{7}\left(1-\cos^7\frac{U_m}{2}\right) + \frac{1}{5}\left(1-\cos^5\frac{U_m}{2}\right)\end{array}\right]$$

L'assimilation du rayonnement incident à celui d'un corps noir à température T°K conduit, pour E, à la même expression que précédemment :

$$E_\lambda = \frac{2\pi h\, c^2 \sin^2\varphi_o}{\left(\exp\frac{h\,c}{\lambda kT} - 1\right)\cdot\lambda^5}$$

Compte tenu des résultats précédents , les sommations partielles successives de la densité d'énergie élémentaire en un point du plan focal fournissent une expression de la densité totale de flux énergétique qui se présente comme constituée d'un terme principal (relatif à P_{oo}) et de termes secondaires (relatifs à P_{11} , P_{22} , P_{33} ....) . Ces différents termes sont des séries entières de la variable sans dimension $y = \frac{\pi a\, k\, T}{h\, c}\ \frac{r}{p}$ (p=2f)

a) Le terme principal de la densité de flux énergétique en un point du plan focal s'écrit :

$$J_{oo}(r) = I_o \sum_p (-1)^p\, a_p A_p\, y^{2p} \quad \text{avec} \quad a_p = \frac{(2p+5)!}{5!} \times \frac{D_{2p+5}}{D_5} \times A_p \times \ldots$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2}\,\alpha_{p1}(2p+6)(2P+7)\,\frac{D_{2p+7}}{D_{2p+5}}\,(\pi\, akTsin\,\varphi_o/\,hc)^2 \\ + \frac{5}{36}\,\alpha_{p2}(2p+6)(2p+7)\ldots(2p+9)\,\frac{D_{2p+9}}{D_{2p+5}}\,(\pi\, akTsin\,\varphi_o/hc)^4 \\ - \frac{7}{288}\,\alpha_{p3}(2p+6)(2p+7)\ldots(2p+11)\,\frac{D_{2p+11}}{D_{2p+5}}\,(\pi akTsin\,\varphi_o/hc)^6 \\ + \frac{7}{2400}\,\alpha_{p4}(2p+6)(2p+7)\ldots(2p+13)\,\frac{D_{2p+13}}{D_{2p+5}}\,(\pi\, akTsin\,\varphi_o/hc)^8 \\ - \frac{11}{43200}\,\alpha_{p5}(2p+6)(2p+7)\ldots(2p+15)\,\frac{D_{2p+15}}{D_{2p+5}}\,(\pi\, akTsin\,\varphi_o/hc)^{10} \\ + \frac{143}{8467200}\alpha_{p6}(2p+6)(2p+7)\ldots(2p+17)\frac{D_{2p+17}}{D_{2p+5}}\,(\pi kTsin\varphi_o/hc)^{12} \\ - \frac{143}{812851200}\,\alpha_{p7}(2p+6)(2p+7)\ldots(2p+19)\frac{D_{2p+19}}{D_{2p+5}}(\pi kTsin\,\varphi_o/hc)^{14} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

(on a posé pour plus de commodité $D_{2p+k} = e^{-\alpha} E_{2p+k}(\alpha) - e^{-\beta} E_{2p+k}(\beta)$

En particulier , pour $p = 0$, on obtient l'expression du premier terme a_o du développement en série de $\mathcal{J}_{oo}(r)/I_o$, qui correspond à la densité de flux énergétique au foyer du miroir soit

$$a_o = 1 - 6.7. \frac{\alpha_{o1}}{2} \cdot \frac{D_7}{D_5} (\pi akTsin\,\varphi_o/hc)^2$$

$$+ 6.7.8.9. \frac{5}{36} \alpha_{o2} \frac{D_9}{D_5} (\pi akTsin\,\varphi_o/hc)^4$$

$$- 6.7...11 \frac{7}{288} \alpha_{o3} \cdot \frac{D_{11}}{D_5} (\pi kTasin\,\varphi_o/hc)^6$$

$$+ 6.7...13 \frac{7}{2400} \alpha_{o4} \cdot \frac{D_{13}}{D_5} (\pi akTsin\,\varphi_o/hc)^8$$

$$- 6.7...15 \frac{11}{43200} \alpha_{o5} \cdot \frac{D_{15}}{D_5} (\pi akTsin\,\varphi_o/hc)^{10}$$

$$+ 6.7...17 \frac{143}{8467200} \alpha_{o6} \cdot \frac{D_{17}}{D_5} (\pi akTsin\,\varphi_o/hc)^{12}$$

$$- 6.7...19 \frac{143}{812851200} \alpha_{o7} \cdot \frac{D_{19}}{D_5} (\pi akTsin\,\varphi_o/hc)^{14}$$

L'examen des deux développements en série précédents conduit aux remarques suivantes :

- Dans le cas général d'une source de rayonnement à diamètre apparent non nul , la partie principale de la densité de flux énergétique en un point du plan focal du miroir admet un développement en série formellement analogue à celui obtenu pour la densité de flux énergétique lorsque les rayons incidents étaient supposés être rigoureusement parallèles (source à diamètre apparent nul) .

Le passage du terme général du second développement à celui du premier s'opère pas l'intervention d'un facteur multiplicateur inférieur à l'unité et indépendant de la position du point considéré de la tache focale . Ce facteur ne dépend que du diamètre apparent de la source de rayonnement , du rayon moyen des grains de relief de la surface réflectrice (en d'autres termes de sa qualité optique)

et de la transparence de l'atmosphère . Il est par ailleurs d'autant plus proche de l'unité que le rang du terme considéré est plus grand .

- La densité de flux énergétique relative au foyer géométrique du miroir (maximum central du flux énergétique) dans le cas général (source de rayonnement à diamètre apparent non nul) est inférieure à la valeur correspondant au cas de rayons incidents rigoureusement parallèles (source à diamètre apparent nul). Sa valeur dépend également du rayon moyen des grains de relief de la surface du miroir , du diamètre apparent de la source et de la transparence de l'atmosphère . Si l'on prend comme paramètre $z = \frac{\pi\, akT \sin \varphi_o}{hc}$, l'expression de la densité maximum de flux énergétique s'écrit à un facteur numérique près :

$$\mathcal{Y}_{oo}(0) = z^2 \left\{ \begin{array}{l} 1 - 21\, \alpha_{o1} \frac{D_7}{D_5} z^2 + 420\, \alpha_{o2} \frac{D_9}{D_5} z^4 \\ - 8085\, \alpha_{o3} \frac{D_{11}}{D_5} z^6 - \frac{756756}{5} \alpha_{o4} \frac{D_{13}}{D_5} z^8 \\ + 396396\, \alpha_{o5} \frac{D_{15}}{D_5} z^{10} \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

La dérivation par rapport à z conduit au développement suivant :

$$2z \left\{ \begin{array}{l} 1 - 42 \frac{D_7}{D_5} \alpha_{o1} z^2 + 1260 \frac{D_9}{D_5} \alpha_{o2} z^4 \\ - 32340 \frac{D_{11}}{D_5} \alpha_{o3} z^6 + 756756 \frac{D_{13}}{D_5} \alpha_{o4} z^8 \\ + 2378376 \frac{D_{15}}{D_5} \alpha_{o5} z^{10} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

En raisonnant sur la somme partielle de rang n du développement précédent (qui est un polynôme de degré n) et sur son polynôme associé (admettant pour racines les inverses des ra-

cines de la somme partielle considérée) il est possible de montrer en se basant sur les propriétés de la série figurant entre crochets , que quand $n \to \infty$ toutes les racines de la somme partielle tendent également vers l'infini . On en conclut que considérée comme fonction du paramètre z la densité maximale de flux énergétique dans le plan focal est constamment croissante , et qu'elle admet une asymptote horizontale . En d'autres termes , la valeur maximale de la densité de flux énergétique dans le plan focal est une fonction croissante de la dimension moyenne des grains de relief de la surface réfléchissante , tendant vers une limite finie lorsque le rayon moyen des grains de relief augmente indéfiniment.

Partant de l'expression du terme principal (relatif à P_{oo}) de la densité de flux énergétique , on obtient par passage à la limite pour $Z_b \to \infty$, la valeur suivante de la densité de flux maximale :

$$I_{max} = C(U_m) \frac{\sin^2 U_m}{\sin^2 \varphi_o} \cdot E_o R_m$$

$C(U_m)$ désignant une expression fonction de $\cos \frac{U_m}{2}$ qui varie peu avec U_m quand ce dernier reste petit , de façon à pouvoir satisfaire à la condition $\cos U_m \simeq 1$ (faible ouverture du miroir) .

On retrouve ainsi , dans le cas de miroirs à surface réflectrice parfaite , la proportionnalité de la densité moyenne de flux énergétique au rapport $\sin^2 2 U_m / \sin^2 2 \varphi_o \simeq \sin^2 U_m / \sin^2 \varphi_o$ telle qu'elle résulte d'un calcul direct correspondant à l'approximation de l'optique géométrique . Conformément aux conclusions qui découlent d'une analyse directe des conditions de réflexion du rayonnement d'une source à diamètre apparent non nul par un miroir parabolique de révolution à macro-géométrie parfaite et dont la surface présente une réflexion idéale (suivant les lois de Descartes) , on retrouve par ailleurs l'existence d'une réparti-

tion de l'énergie du rayonnement concentré dans le plan focal

b) Les termes secondaires retenus (ceux relatifs à P_{11} , P_{22} , P_{33} etc..) n'interviennent que dans la détermination de la densité de flux énergétique en dehors du foyer géométrique du miroir parabolique considéré . En tenant compte de leur contribution , on obtient une expression du flux énergétique sous la forme d'un développement en série de terme général

$$(-1)^p A_p (2p+5)!/5!\,.\,\frac{D_{2p+5}}{D_5}\,.\,y^{2p}\;x$$

$$\left\{\begin{array}{l} x\ 1 - \left[(p+3)\alpha_{p1} - 4p\alpha'_{p1}\right](2p+7)\,\dfrac{D_{2p+7}}{D_{2p+5}}\,Z^2 \\ x \quad + \left[5(p+3)(p+4)\alpha_{p2} - 16p\left\{(2p+8)\alpha'_{p2} - \right.\right. \\ \qquad \left.\left. -3(p-1)\left[\alpha''_{p1} - \tfrac{1}{2}\beta''_{p1}\right]\right\} + 3p(p-1)\beta'_{p1}\right] x \\ x \quad (2p+7)(2p+9)/9\,.\,D_{2p+9}/D_{2p+5}\,.\,Z^4 \\ \quad - \left[7(p+3)(p+4)\alpha_{p3} - 56p(p+4)\alpha'_{p3} - \right. \\ \quad + 72p(2p-2)\alpha''_{p3} - 36p(2p-2)\beta''_{p2} + \\ \quad \left. + 32/3\,.\,p(p-1)\beta'_{p2}\right] x\ D_{2p+11}/D_{2p+5} \quad x \\ x \quad (p+5)(2p+7)(2p+9)(2p+11)/36\ Z^6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Pour une valeur donnée du paramètre Z , l'expression entre accolades prend des valeurs d'autant plus proches de 1 que le rang p du terme considéré est plus grand . Pour les valeurs courantes des paramètres a et Z la réduction calculée du maximum central de la densité de flux par rapport au cas d'une source de rayonnement à diamètre apparent nul est de l'ordre de 7 à 10 % en valeur relative . On en déduit que les extrema secondaires sont alors très sensiblement réduits (le minimum d'environ la moitié de la valeur obtenue précédemment et le maximum

du quart au tiers de la valeur correspondante) . Au total on est conduit à prévoir , pour la courbe théorique de répartition de l'énergie dans le plan focal , un minimum et un maximum secondaires nettement plus accusés que dans le cas examiné plus haut , leur localisation respective dans la tache focale restant sensiblement inchangée (du moins d'un point de vue pratique) .

D) COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES AVEC CEUX OBTENUS DANS LE CAS DE L'APPROXIMATION DE RAYONS INCIDENTS RIGOUREUSEMENT PARALLELES . DISCUSSION ET CONCLUSIONS .

1º) On a déjà vérifié , tant sur l'expression littérale générale de la densité d'énergie du rayonnement concentré dans le plan focal que sur les résultats d'intégration des termes successifs (relatifs aux différents P_{mn} avec $m+n=21$) , la coïncidence , pour $\varphi_o \longrightarrow 0$, des résultats actuels avec ceux relatifs au cas d'un rayonnement incident provenant d'une source de diamètre apparent nul .

2º) Pour des valeurs faibles des paramètres a et φ_o ($a \ll 0{,}05mm$) le terme principal de la densité d'énergie en un point du plan focal (celui relatif à P_{oo}) ne diffère pratiquement pas de l'expression obtenue sur la base de l'hypothèse de rayons incidents rigoureusement parallèles . Les termes secondaires (correspondant aux P_{mn} tels que $m,n \neq 0$; $m+n=21$) sont alors négligeables devant le terme principal , en sorte que la courbe théorique de répartition de l'énergie dans le plan focal peut , avec une très bonne approximation , être confondue avec celle du chapitre précédent .

3º) Pour des valeurs croissantes des paramètres a et φ_o, l'écart entre les résultats théoriques correspondant aux deux cas successivement étudiés n'autorise plus les mêmes conclusions :

a) La valeur maximale de la densité de flux énergétique , qui variait précédemment comme le carré du rayon moyen des grains de relief de la surface réflectrice , (cas de faibles valeurs du rayon moyen des grains de relief) , continue à croître avec ce paramètre géométrique mais de manière de moins en moins accusée au fur et à mesure de l'augmentation de la valeur de ce paramètre , pour tendre finalement de façon asymptotique vers une limite finie (cas de l'optique géométrique) quand le rayon moyen des grains de relief devient suffisamment grand . Simultanément , et toutes choses égales par ailleurs , la valeur maximale de la densité de flux énergétique reste constamment inférieure à celle relative au cas de rayons incidents rigoureusement parallèles (source de rayonnement de diamètre apparent nul) , et cela d'autant plus que la valeur du rayon moyen des grains de relief est plus grande .

b) L'incidence , sur la répartition de l'énergie dans le plan focal , des termes secondaires (relatifs à P_{11}, P_{20} , P_{22}.....) est telle , dans le cas général (source de diamètre apparent non nul) , que son importance décroît très rapidement quand le nombre de termes du développement en série de la densité de flux énergétique $I(r)$ pris en considération devient de plus en plus grand . En d'autres termes , cette incidence devient de moins en moins sensible au fur et à mesure que l'on s'écarte du foyer géométrique du miroir .

c) Il découle de la réduction mentionnée de la valeur maximale de la densité de flux énergétique et de la faible incidence , à des distances suffisantes du foyer géométrique , des termes secondaires sur la courbe théorique de répartition de l'énergie , que dans le cas de source de rayonnement à diamètre apparent non nul , le profil de la courbe théorique de répartition de l'énergie dans le plan focal présentera des extréma se-

condaires plus accusés quoique sensiblement réduits (le minimum d'environ la moitié de la valeur correspondant au cas précédent , le maximum approximativement du tiers à la moitié de sa valeur , pour les valeurs courantes du rayon moyen des grains de relief de la surface réflectrice) . En même temps , les positions respectives des deux extremas secondaires dans la tâche focale ne varieront pas de façon appréciable par rapport à ce qu'elles étaient dans le cas particulier examiné précédemment . Le calcul , d'après le théorème de Whittaker , des coordonnées de ces deux extremas permet de conclure qu'ils seront légèrement décalés dans le sens d'un éloignement par rapport au foyer . Une détermination précise de la position des extrema s'avérant d'un grande complexité , nous continuerons à les situer en utilisant les résultats précédents . Une telle procédure paraît tout à fait acceptable pour $a \sim 0{,}05$mm dans le cas du rayonnement solaire ($\varphi_o = 0{,}465.10^{-2}$ radian , $T \sim 5000$ à 5400º K) et pour un plus grand domaine de variation du rayon moyen des grains de relief de la surface s'agissant de la pleine lune (φ_o gardant la même valeur alors que T 2000º K en admettant un albedo voisin de 0,1) .

d) Des considérations précédentes , on conclut la possibilité d'une mise en évidence expérimentale plus aisée des extrema secondaires dans le cas du "rayonnement lunaire" que dans le cas du rayonnement solaire , du fait de la plus grande importance relative qu'ils ont alors (les difficultés expérimentales de toute autre origine étant écartées) . On peut prévoir également un léger déplacement des extrema quand on passe du cas du rayonnement solaire à celui de la pleine lune .

4º) Le rôle important joué par la valeur du rayon moyen des grains de relief de la surface réflectrice dans la détermination de la valeur maximale de la densité de flux éner-

gétique du rayonnement concentré dans le plan focal conduit à chercher , sous l'angle pratique de la construction des miroirs paraboliques précis , quelles sont les valeurs optimales de ce paramètre qui permettent d'atteindre les densités de flux les plus élevées . Bien que ce problème n'admette pas une solution rigoureuse , on peut en donner une solution approchée en remarquant que toute valeur du paramètre Z_b ($Z_b = ka\cos u\cos\frac{u}{2}\sin\varphi_o$) qui rend minimum l'expression $J_o^2(Z) + J_1^2(Z)$ réalise approximativement la condition cherchée . Le calcul montre qu'il faut alors avoir $J_1(Z) = 0$ et qu'en fait la courbe de variation de l'expression étudiée présente une série de points d'inflexion à tangente horizontale pour les valeurs de Z racines de $J_1(Z)=0$. Par ailleurs , à partir de la troisième racine ($Z_3 = 10,17347$) la variation relative de $J_o^2(Z) + J_1^2(Z)$ devient pratiquement négligeable devant l'unité et correspond , d'une racine à la suivante , à une pente moyenne de $0,10/3,14$. Ces circonstances permettent de ne pas prendre en considération le facteur $\cos u \cos u/2$ dans l'expression de Z_b et pour les ouvertures angulaires courantes des miroirs paraboliques précis ($U_m \simeq 60º$), pourvu que l'on utilise , pour la détermination du paramètre a , une longueur d'onde située dans la région infrarouge du spectre du rayonnement incident et que le calcul soit conduit en utilisant l'une des racines de $J_1(Z) = 0$ de rang au moins égal à 5. En prenant $Z = z_5 = 16,47063$, $\lambda = 1\mu$ on trouve $a = 0,56mm$, ce qui correspond aux meilleures surfaces optiques actuellement réalisables (objectifs photographiques en particulier) .

5º) Les résultats précédents suggèrent des critères quantitatifs pouvant servir à caractériser la "précision"d'un miroir parabolique :

a) En ce qui concerne la macrogéométrie de la surface réfléchissante , l'incidence , sur le calcul théorique du flux énergétique dans le plan focal , du diamètre apparent de la

source du rayonnement incident , montre que l'hypothèse d'une p/erfection macrogéométrique de la surface réflectrice implique une valeur moyenne de l'angle d'écart entre la surface réelle et la surface idéale (théorique) pratiquement négligeable devant le demi-diamètre apparent de la source . Dans le cas du soleil ou de la pleine lune ($\psi_o = 0{,}465\ 10^{-2}$ radian) , on devrait avoir un angle d'écart inférieur à la demi-minute d'arc . Cette performance est intermédiaire entre celles réalisées dans les miroirs astronomiques (jusqu'à 1 seconde d'arc) et les projecteurs courants (de 8 à 20 minutes d'arc) .

b) S'agissant de la qualité optique de la surface réflectrice , la valeur $a = 0{,}56$mm du rayon moyen des grains de relief de la surface peut être adoptée pour caractériser , dans dans la pratique , une très bonne qualité optique . Sur cette base , on peut suggérer la classification suivante des miroirs quant à la qualité optique de leur surface réflectrice :

1ère	classe	0,56mm	>	a	>	0,100mm
2ème	classe	0,100mm	>	a	>	0,050mm
3ème	classe	0,050mm	>	a	>	0,025mm
4ème	Classe	0,025mm	>	a		

B I B L I O G R A P H I E

(1) H. SCHMALTZ - Kachestvo poverkhnosti . Gos . Nau-Tekh Izd-vo Mash.Lit. Moskva-Leningrad 1941

(2) L. HOLLAND - The properties of glass surfaces . Chapman & Hall London 1964

(3) S. WERNICK & R. PINNER - Les traitements de surface et la finition de l'aluminium et de ses alliages. Eyrolles 1962

(4) G. ABETTI - The Sun . Faber & Faber 1955

(5) LANDAU & LIFSHITZ - Course of Theoretical Physics. Vol 2 Pergamon Press London 1959

(6) WATSON - The Theory of Bessel Functions . Cambridge 1962

(7) PETIAU - La théorie des fonctions de Bessel . Editions du C.N.R.S. 1955

(8) SONINE - Issledovanija o tsilindricheskikh funktsiakh i spetsialjnikh polinomakh. Gos . Izd-vo Tekh-Teor. Lit Moskva 1954

(9) P. MOON - Proposed standard solar radiation curves for engineering use. Jour. Franklin Inst. Nov 1940 p 583

(10) WHITTAKER & WATSON - A Course of Modern Analysis. 4th Edit. Cambridge 1963

(11) H.W. TURNBULL - Theory of Equations . Oliver & Boyd 1963

(12) R.R.APARISSI - Kontsentratsija solnechnoj energii v geliotekhnicheskikh sooruzheniakh. Kand. Dissert. Energ. Inst. Akad. Nauk S.S.S.R. 1955

(13) G. SZEGO - Orthogonal polynomials. American Math. Soc. New York 1939 (Collq. Publ. vol 23)

TROISIEME PARTIE

ETUDE EXPERIMENTALE DE LA REPARTITION DE L'ENERGIE DANS LE PLAN FOCAL DE MIROIRS PARABOLIQUES PRECIS (TYPE PROJECTEURS DE D.C.A.)

I CHOIX DES METHODES DE MESURE DU FLUX ENERGETIQUE DU RAYONNEMENT CONCENTRE DANS LE PLAN FOCAL DE MIROIRS PARABOLIQUES PRECIS (TYPE PROJECTEUR DE D.C.A.)

L'analyse des fifférentes méthodes de mesures applicables à l'étude expérimentale de la répartition de l'énergie du rayonnement concentré dans le plan focal d'un miroir parabolique précis (type projecteur de D.C.A) et l'examen des résultats expérimentaux obtenus par différents auteurs nous ont conduit à faire concurremment appel aux trois méthodes fondamentales :

1) La méthode calorimétrique sous sa forme classique (calorimètre à circulation d'eau ou de tout autre liquide convenable) dans le cas de l'exploration de la zone centrale de la tâche focale .

La mise en oeuvre a été conçue de façon à permettre le calcul de la densité vraie d'énergie dans le plan focal - au lieu de la densité moyenne obtenue par différents auteurs - et une vérification de la stabilité de la densité de flux énergétique du rayonnement solaire incident pendant la conduite des mesures .

2) La méthode radiométrique sous la forme développée par H. BLAU (1) et P. GLASER (2) : couple Cuivre-Constantan comme dispositif de mesure , très faible diamètre de la surface

réceptrice (D#1 mm) , grande ouverture angulaire d'attaque par le rayonnement incident (valeur totale # 140º) , réfrigération énergique de la masse de cuivre vers laquelle s'évacue le flux de chaleur absorbé par le disque récepteur de Constantan . L'épaisseur de ce dernier a été choisie après de nombreux essais préliminaires de sensibilité et de fidélité , de façon à assurer une stabilité et une résistance satisfaisantes de l'appareil tout en garantissant une sensibilité suffisante .

L'appareil , dont la courbe d'étalonnage est linéaire d'après les résultats de différents auteurs (3) a été étalonné par comparaison avec le calorimètre précédent et en tirant parti des possibilités offertes par le grand four solaire de Mont-Louis .

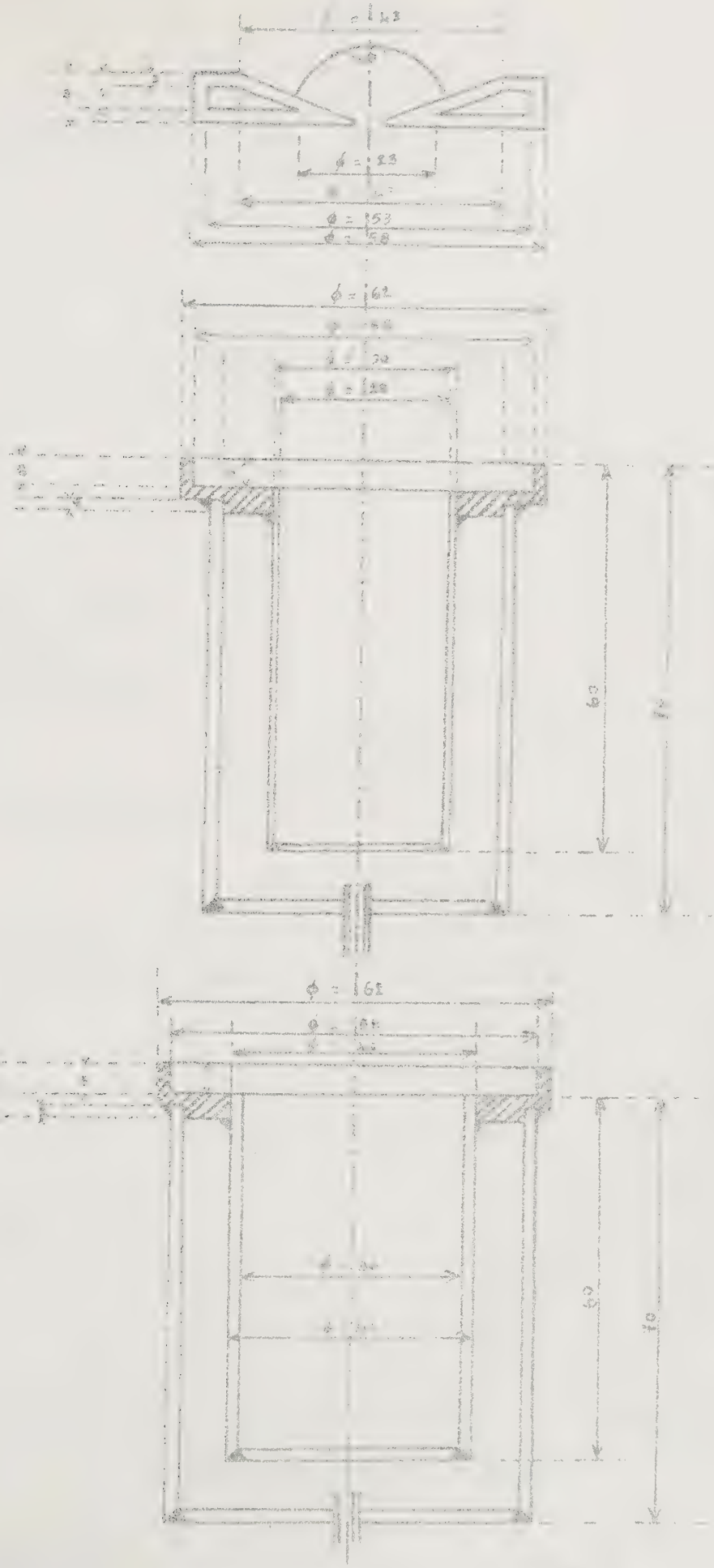
3) La méthode photométrique mise en oeuvre en utilisant la pleine lune comme source de rayonnement et en faisant appel aux microphotodiodes modernes pour la mesure de la densité de flux dans le plan focal . Les deux montages classiques (mesure du courant photoélectrique et observation du signal obtenu à travers une résistance égale à celle de la photodiode) ont été concurremment réalisés .

I DESCRIPTION ET CARACTERISTIQUES DE L'APPAREILLAGE UTILISE . CONDUITE DES MESURES . PRECISION DES RESULTATS .

A) METHODE CALORIMETRIQUE .

1) Calorimètre et accessoires .

Prenant en considération l'importance d'une définition aussi précise que possible de la surface réceptrice délimitée dans la tâche focale , le schéma choisi est celui du calorimètre à diaphragme selon la technique utilisée par MM. F. TROMBE et M. FOEX (4) . L'appareil représenté



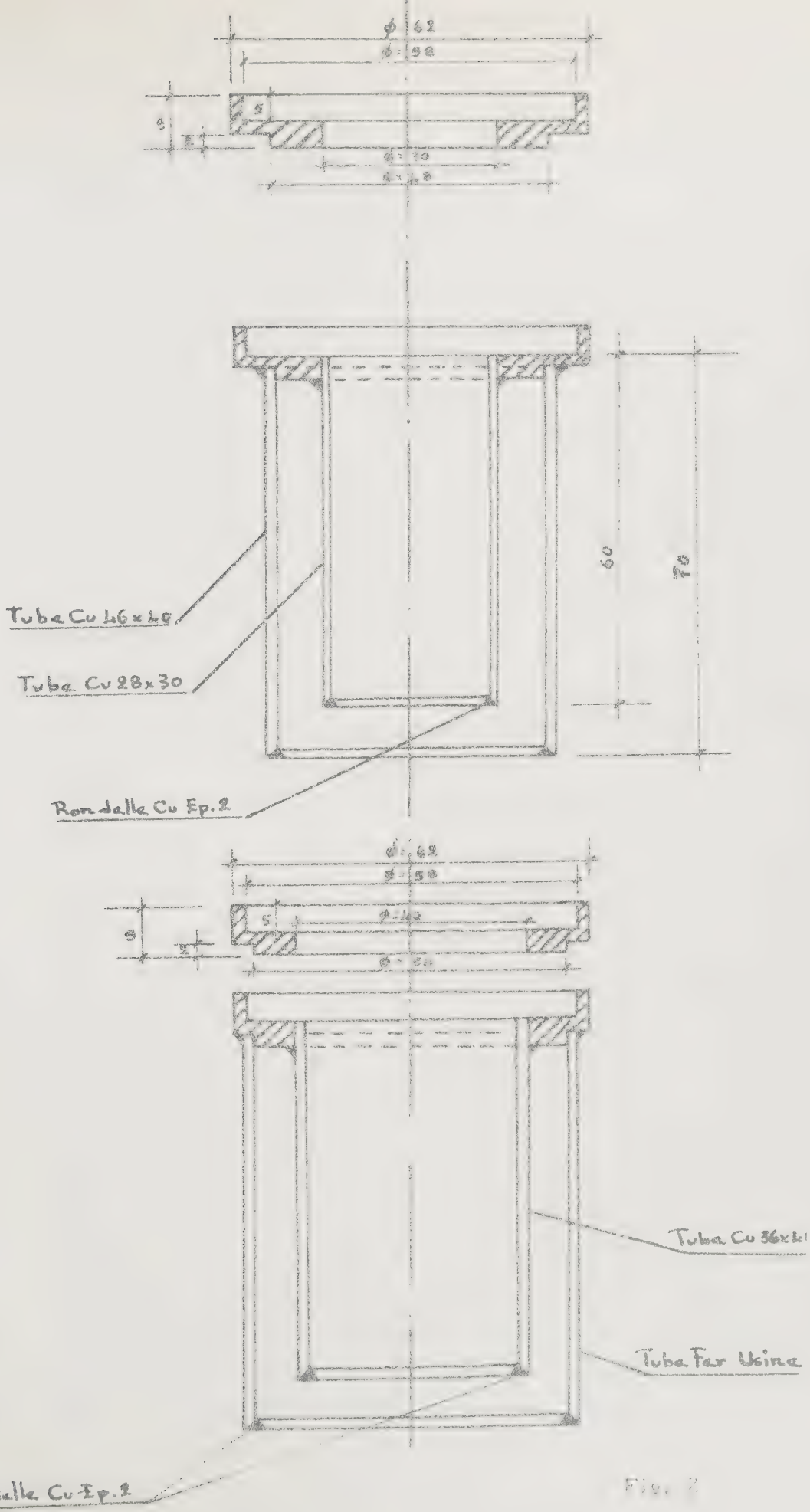

Tuba Cu 46x40
Tuba Cu 28x30
Rondelle Cu Ep. 2
60
70
Tuba Cu 36x34
Tuba Fer Usine
Rondelle Cu Ep. 2

Fig. 2

ci-contre (fig . 1 et 2) est constitué par deux parties distinctes assemblées :

a) Un premier calorimètre très plat , à faible capacité situé à la partie supérieure du dispositif assemblé porte le diaphragme de diamètre variable destiné à limiter dans la tâche focale la surface réceptrice du rayonnement dont l'énergie sera absorbée par le second calorimètre . Une grande ouverture angulaire (140º) permet de s'assurer que la totalité du rayonnement solaire concentré dans les limites du diaphragme traverse effectivement ce dernier . La surface externe est noircie de façon à garantir un coefficient d'absorption voisin de l'unité pour la fraction du rayonnement reçue en dehors du diaphragme .

La mesure du flux énergétique est rendue possible par une circulation d'eau de refroidissement dont la température est mesurée à l'entrée et à la sortie de l'appareil et dont le débit est connu (régime permanent) .

b) Un second calorimètre plus allongé et de capacité nettement plus grande comporte une cavité noircie constituant , après assemblage des deux parties , un corps noir quasi parfait avec le support du diaphragme du calorimètre précédent . Cette cavité absorbante est entourée d'un espace annulaire dans lequel circule l'eau de refroidissement de l'appareil . Les dimensions de l'appareil (voir figure) ont été choisies de façon à limiter au minimum les effets perturbateurs du dispositif sur la répartition étudiée (ombre portée sur le miroir, conditions de réception du rayonnement , en particulier ouverture angulaire suffisante) . La capacité réalisée (correspondant à une valeur en eau de 75 et 105g pour les deux calorimètres construits) permet un choix convenable du débit et l'obtention de températures d'équilibre voisines pour les deux calorimètres su-

périeur et inférieur ainsi qu'une élévation de température assez faible pour réduire les pertes par convection et rayonnement .

Une série de calorimètres plats a été réalisée , avec les valeurs suivantes des diamètres de diaphragme (valeurs approchées) tout en garantissant une précision suffisante .

2 mm , 3 mm , 5 mm , 7 mm , 9 mm , 13 mm , 15 mm , 17 mm , 19 mm , 21 mm .

Des déterminations plus précises de ces diamètres ont été effectuées au microscope ou au pied à coulisse au 1/20 mm selon le cas .

Deux calorimètres longs ont été construits pour être utilisés avec les deux types de miroirs étudiés (1,50 m et 2 m de diamètre) , en tenant compte de l'ordre de grandeur des flux énergétiques obtenus dans les deux cas .

La température de l'eau de refroidissement est mesurée par des thermomètres au 1/50º C ce qui garantit une précision comprise entre 1/350 et 1/250 pour une élévation de température variant entre 7 et 5º C .

2) Conduite des Mesures

L'exploration complète de la tâche focale , dans le cas actuel , nécessite l'exécution d'un train complet de mesures comportant la détermination des flux énergétiques relatifs à une dizaine de valeurs différentes du diamètre du diaphragme . Compte tenu du temps moyen requis pour effectuer le changement du calorimètre plat et la vérification du réglage optique , la durée totale atteint facilement une heure . L'intensité du rayonnement solaire incident ne devant théoriquement pas varier tout au long des mesures , il est absolument indispensable d'effectuer ces dernières dans des conditions de faible variation de l'intensité du rayon-

nement solaire (voisinage du passage du soleil au zénith) .

La conduite proprement dite des mesures comporte :

a) Un réglage optique assurant la coïncidence du plan du diaphragme avec celui du plan focal du miroir et celle du centre du diaphragme avec le foyer géométrique du miroir . Ce premier réglage s'effectue en diaphragmant fortement le miroir (ouverture angulaire de l'ordre de 5/32 ou 2/17 selon le miroir étudié) et en agissant sur le mécanisme du support du dispositif de mesure (ensemble calorimétre long + calorimètre plat) , seule le calorimètre long étant monté , la cavité étant alors fermée par un disque de papier fin d'épaisseur négligeable .

b) Après installation du calorimètre plat et dans les conditions normales de fonctionnement du miroir (absence du diaphragme utilisé dans le réglage précédent) , on ajuste le débit de façon à réaliser une température d'équilible sensiblement égale à la température extérieure . Des essais préliminaires effectués avant les mesures permettent connaissant les températures de l'eau de refroidissement et de l'atmosphère , de déterminer l'ordre de grandeur du débit à réaliser , laissant la seule réalisation du réglage fin pour le moment d'exécution des mesures .

c) La lecture des températures d'entrée et de sortie de l'eau de circulation des deux calorimètres (plat et long) et la détermination des débits dès qu'un régime permanent s'est établi .

3) Calculs et Précision des mesures

a) Notations

$S = \pi R^2$ surface du diaphragme

Q_s flux énergétique correspondant à la surface réceptrice s du plan focal

q_s flux de chaleur mesuré par le calorimètre principal

D_s débit de l'eau de circulation du calorimètre à cavité absorbante

$\theta_i = \theta_o$ température de l'eau à l'entrée

$\theta_f = \theta_e$ température de l'eau à la sortie pratiquement égale à la température extérieure

ε facteur d'absorption de la cavité pour le rayonnement incident .

b) Calculs - Précision des mesures -

$$q_s = \varepsilon Q_s \qquad (\varepsilon \simeq 1)$$

$$\frac{Q_s - Q_s}{S - S} = \frac{\Delta Q_s}{\Delta S} = I\left(R + \frac{\Delta R}{2}\right)$$

$$q_s = D_s (\theta_e - \theta_o)$$

$$q_s = D'_s (\theta'_e - \theta'_o)$$

$$\frac{\Delta Q_s}{\Delta S} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q'_s - q_s}{S' - S}$$

En particulier si $\theta_e = \theta'_e$; $\theta_o = \theta'_o$

$$q_s = (D'_s - D_s)(\theta_e - \theta_o) = \Delta D \cdot \Delta\theta$$

et

$$\left|\frac{\delta(\Delta q_s)}{\Delta q_s}\right| \leq \left|\frac{\delta(\Delta D)}{\Delta D}\right| + \left|\frac{\delta(\Delta\theta)}{\Delta\theta}\right| ; \left|\frac{\delta(\Delta S)}{\Delta S}\right| \leq \left|\frac{\delta R}{R}\right| \quad \left|\frac{\delta(\Delta R)}{\Delta R}\right|$$

$$\left|\frac{\delta I}{I}\right| \leq \left|\frac{\delta(\Delta D)}{\Delta D}\right| + \left|\frac{\delta(\Delta\theta)}{\Delta\theta}\right| + \left|\frac{\delta R}{R}\right| + \left|\frac{\delta(\Delta R)}{\Delta R}\right| + \left|\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right|$$

La mesure du diamètre du trou circulaire du diaphragme avec une lunette à oculaire micrométrique permet de connaître $d = 2R$ avec une précision supérieure à 1/200 et

$R = \frac{d' - d}{2}$ avec une précision supérieure au 1/100 . La mesure du débit effectuée en observant le volume d'eau ayant circulé dans l'appareil après un temps connu (de l'ordre de 3 à 4 minutes) peut aisément se réaliser avec une crécision supérieure à 1/300 .

Si l'on remarque que $\Delta\theta \sim 5$ à 7º C la précision de la mesure est sûrement supérieure à 1/200 . Enfin en prenant $\varepsilon = 1$ pour la cavité absorbante , on peut estimer la précision supérieure à 2/100 .

On peut donc estimer la précision moyenne de la mesure de la densité d'énergie dans le plan focal dans le cas le plus défavorable (diaphragmes de plus petites ouvertures) .

$$\left|\frac{dI}{I}\right| \leqslant 1/200 + 1/100 + 1/300 + 1/200 + 2/100 = 4,5/100$$

En tenant compte de la réalisation non rigoureuse de l'égalité des températures respectives de l'atmosphère et de l'eau de refroidissement à la sortie du calorimètre on peut estimer les pertes par convection comme ayant une valeur Q_p calculable par

$$Q_p = k\, S_\ell\, (\theta_f - \theta_c)$$

$k \simeq 3,4 \;\; 10^{-4}$ cal/cm^2/s/ºC

S_ℓ = surface latérale baignant dans l'air du calorimètre long

$S_\ell \simeq 200$ cm^2 (version 2) ;

On trouve alors

$Q_p \simeq 3,4 \times 10^{-4} \times 200 \times 1 = 6,8 \cdot 10^{-2}$ cal/s pour $\theta_f - \theta_e = 1$ºC

ce qui permet de confirmer le caractère négligeable de ces pertes (et de leur influence sur la précision des mesures) du moins tant que Q_s possède une valeur supérieure à une

ou quelques centaines de calories par seconde .

Au total , la précision moyenne des mesures sera comprise entre 3,5 % et 5,5 % .

B) METHODE RADIOMETRIQUE

1) Remarques préliminaires .

Au cours de nombreux essais effectués sur des miroirs paraboliques verticaux avec un premier radiomètre construit à l'atelier du Laboratoire de MontLouis d'après le schéma de la figure 3 , nous avons pu faire varier l'épaisseur du disque de Constantan , le diamètre du fil de cuivre , la nature de l'alliage utilisé pour réaliser la soudure du thermocouple cuivre-Constantan et observer l'influence de ces différents facteurs sur le comportement de l'appareil sous le triple point de vue de sa sensibilité , de sa fidélité et de sa robustesse :

a) Commençant avec un disque de 2/10 mm d'épaisseur et un fil de cuivre de 2/10 mm de diamètre , nous avons obtenu des courbes de répartition de l'énergie d'allure classique (ne comportant aucun entremum secondaire en dehors du maximum central) . Puis faisant décroître progressivement l'épaisseur du disque , nous avons vu apparaître de plus en plus nettement les deux extrema secondaires sur les courbes enregistrées à l'aide d'un BAUDOIN en utilisant l'oscilloscope le plus adapté (sensibilité et temps de réponde) aux conditions de défilement du radiomètre (vitesse # 1 mm/s) choisies d'après la constante de temps du radiomètre (1/10 à 2/10 s) et le diamètre de la surface réceptrice (1 mm) . Ces extremas sont devenus très nets à partir d'une épaisseur de 1/10 mm , une diminution de l'épaisseur du disque au delà de 7 à 8/100mm ne permettant plus à l'appareil d'être exposé sans risque de

destruction de la soudure du thermocouple au bout de quelques secondes . Une épaisseur de disque de 1/10mm et un diamètre de fil de même valeur correspondent à un compromis satisfaisant entre une bonne sensibilité et une robustesse suffisante de l'appareil .

b) L'utilisation , pour la soudure du thermocouple , de l'alliage courant conduisant à des résultats reproductibles de manière très satisfaisante ; par contre le recours à un alliage à base d'argent et à point de fusion nettement plus élevé (400º C au lieu de 200º C pour le premier) , malgré l'avantage d'une résistance plus grande du thermocouple à l'exposition au rayonnement pour une épaisseur du disque de constantan inférieure ou égale à 8/100 mm , ne permettait pas malheureusement d'obtenir des indications reproductibles (probablement à la suite d'une altération progressive du thermocouple provoquée par l'apparition de composés divers entre l'argent de la soudure et le cuivre du fil et du disque de Constantan) . Dans ces conditions , malgré une sensibilité moindre (l'épaisseur ne pouvant descendre notablement en dessous de 1/10 mm pour les grandes valeurs de flux à mesurer) , la recherche d'une bonne fidélité pour l'appareil nous a conduit à nous en tenir à la soudure courante .

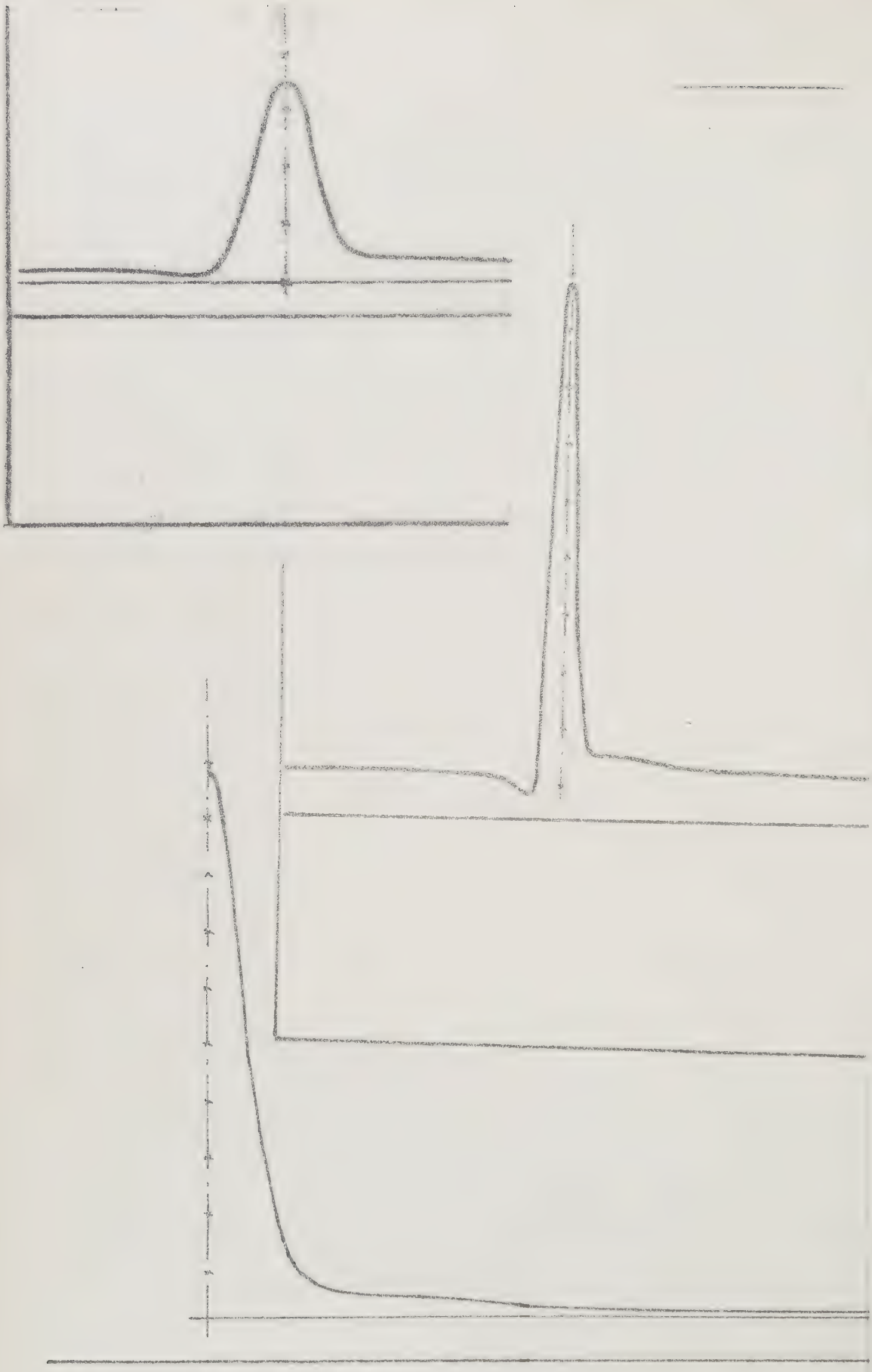
c) S'agissant de la robustesse de l'appareil les observations précédentes permettent de conclure à la nécessité d'utiliser une soudure à point de fusion relativement bas et par voie de conséquence un disque d'épaisseur pas trop faible . Avec un fil de cuivre de 1/10mm de diamètre , une épaisseur de disque de 1/10 mm garantit une bonne robustesse.

d) Malgré un refroidissement assez énergique de la masse de l'appareil dont la surface externe avait été préalablement argentée de manière à abaisser notablement l'absorp-

tion du rayonnement , ce premier radiomètre a toujours donné des enregistrements non symétriques , sans que le réglage optique puisse être mis en cause . En fait , la sensibilité du dispositif de mesure (couple thermo-électrique + enregistreur BAUDOIN) et la surface latérale du radiomètre étaient telles que , malgré le pouvoir réflecteur notable de cette dernière (de l'ordre de 0,9) et compte tenu des grandes valeurs de flux énergétiques réalisées par les miroirs paraboliques précis étudiés , il se produisait toujours une inversion de signe de la f.e.m. thermoélectrique lorsque le radiomètre défilait dans le plan focal , la surface latérale commençant par intercepter le rayonnement alors que la surface réceptrice était encore en dehors de la tâche focale .

La masse du radiomètre s'échauffe d'abord plus vite que la surface réceptrice , mais la différence de température , après avoir augmenté dans une première phase , diminue quand le radiomètre a suffisamment pénétré dans la tâche focale , atteignant des points où le flux énergétique est de plus en plus plus notable ; puis l'inversion disparaît , et la courbe prend une allure normale au voisinage du foyer géométrique .

e) En vue d'éliminer le phénomène d'inversion sans faire croître démesurément les dimensions extérieures du radiomètre (on pourrait en effet intensifier le refroidissement par cette solution) nous avons expéri menté un type de construction faisant appel à un double refroidissement , et qui permet de maintenir l'ombre portée par le radiomètre sur le miroir dans des proportions raisonnables . Les courbes enregistrées dans ces conditions ne comportaient effectivement plus d'inversion de la f.e.m. thermoélectrique ni de dissymétrie , mais le maximum secondaire observé sur les enregis-



trements de l'appareil à simple circulation d'eau disparaissait en même temps et l'on retombait sur les courbes d'allure classique obtenues par divers auteurs .

Les courbes des figures 4,5,6,7 illustrent les différentes observations faites et permettent d'apprécier l'influence des divers facteurs sur l'allure de l'enregistrement obtenu .

Les écarts importants (20 à 64 % en valeur relative) observés entre les valeurs théoriques (prévues par le traitement classique) et expérimentales de la sensibilité par R. GARDON (5) dans le cas de trois radiomètres thermoélectriques à disque et nos propres observations relatives à la variation de l'allure des courbes enregistrées , pour un même miroir étudié , avec des appareils présentant des caractéristiques différentes (construction , épaisseur du disque , dispositif de refroidissement) nous ont conduit à reprendre l'analyse théorique du fonctionnement du radiomètre thermoélectrique à disque tant en régime permanent (température fixe du bloc métallique et flux incident constant) qu'en régime variable (température du bloc et flux incidents variables) .

2) Théorie du fonctionnement de l'appareil . Sensibilité et temps de réponse de l'appareil .

a) Résultats théoriques relatifs au fonctionnement du radiomètre thermoélectrique à disque en régime permanent .

1 - En supposant une distribution exclusivement radiale de la température au sein du disque récepteur (fig. 8) R. GARDON (5) obtient , en admettant une température fixe dans la zone du contact bloc-disque et en négligeant les pertes superficielles :

- pour la variation avec la distance au centre du disque de la différence des températures de la tranche et du contact bloc-disque

$$v(1 + \frac{k}{2} v) = q \frac{a^2 - r^2}{4 K_o \ell} \quad ; \quad v = \Delta\theta(r) = \theta(r) - \theta_o \quad (o \leqslant r \leqslant a)$$

$$v_m(1 + \frac{k}{2} v_m) = \frac{q a^2}{4 K_o \ell} \quad ; \quad v_m = \Delta\theta_m \quad \text{au centre du disque.}$$

Le pouvoir thermoélectrique du thermocouple ayant pour expression (approximation parabolique)

$$\alpha = \alpha_o v (1 + \frac{k'}{2} v)$$

la sensibilité théorique a pour valeur

$$\sigma_c = \frac{\varepsilon \alpha_o a^2}{4 K_o \ell} (1 + \frac{k'-k}{2} v_m) = \frac{E_m}{q_o}$$

GARDON fait remarquer que pour le thermocouple cuivre-Constantan habituellement utilisé dans la construction de ce type d'appareil $k \simeq k'$ ce qui simplifie sensiblement l'expression de la sensibilité théorique : $\sigma_c \simeq \varepsilon \alpha_o a^2 / 4 K_o \ell$

La constante de temps calculée par cet auteur s'écrit :

$$\tau \simeq c \rho a^2 / 4 K_o \ .$$

La comparaison , pour trois radiomètres construits et étalonnés par R. GARDON , des valeurs théoriques et expérimentales de la sensibilité , met en évidence des écarts déjà signalés et qui correspondent dans tous les cas à des valeurs théoriques de la sensibilité inférieures à celles observées expérimentalement .

2 - Une analyse basée sur des conditions aux limites qui semblent mieux traduire les particularités de la construction et du fonctionnement de l'appareil conduit à la solution générale (6) :

$$V(r,z)= \frac{q\,a^2}{4K_o\ell} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8J_o\left(\beta_n \frac{r}{a}\right)\left\{\beta_n \frac{\ell}{a} \operatorname{ch}\beta_n \frac{\ell-z}{a} + \frac{H_2\ell}{K} \operatorname{sh}\beta_n \frac{\ell-z}{a}\right\}}{1+ \frac{(H_1+H_2)a}{K_o\,\beta_n} \coth \beta_n \frac{\ell}{a} + \frac{H_1\,H_2\,a^2}{K_o^2\,\beta_n^2}} \times$$

$$\times \frac{J_1(\beta_n)/\operatorname{sh}\beta_n \frac{\ell}{a}}{\beta_n^3\left[J_o^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n)\right]}$$

avec

$$V = v(1 + \frac{k}{2} v) \; ; \; v = \theta(r\,,\,z) - \theta_o$$

$$K(\theta) = K_o\left[1 + k(\theta - \theta_o)\right] \quad = K_o(1 + k\,v)$$

H_1 et H_2 désignant les coefficients respectifs d'échange superficiel des faces avant et arrière du disque , $J_n(z)$ la fonction de Bessel d'indice n, β_n la racine de rang n de l'équation transcendante :

$$\beta\, J_1(\beta) = a \frac{H'}{K_o} J_o(\beta) = \frac{K'_o}{K_o} \frac{a}{\ell'} J_o(\beta) = ah'\, J_o(\beta) = C\, J_o(\beta)$$

Pour des valeurs suffisamment faibles de l'épaisseur du disque récepteur absorbant , et en négligeant les pertes superficielles , on obtient , pour la sensibilité de l'appareil l'expression :

$$\sigma = \frac{E_m}{q_o} = \frac{\varepsilon \alpha_o\, a^2}{4\,K_o\ell} \left(1 + \frac{2}{ah'}\right) \left(1 + \frac{k' - k}{2} v_m\right)$$

Compte tenu des ordres de grandeurs des coefficients de température du pouvoir thermoélectrique et de la conductibilité thermique , de l'écart de température on peut adopter la valeur approchée :

$$\sigma = \frac{\varepsilon \alpha_o\, a^2}{4\,K_o\ell} \left(1 + \frac{2}{ah'}\right) = \sigma_c \left(1 + \frac{2}{ah'}\right)$$

En accord avec les observations expérimentales , la valeur théorique de la sensibilité est toujours supérieure

à celle correspondant à la théorie classique du radiomètre thermoélectrique à disque . En fait , cet accord se révèle satisfaisant tant sur le plan qualitatif que sous l'angle quantitatif .

b) Résultats théoriques relatifs au fonctionnement de l'appareil en régime variable (dynamique) .

Les conditions effectives d'utilisation de l'appareil (exploration de la tache focale de dispositifs concentrateurs de rayonnement , ou plus généralement d'une distribution spatiale de flux énergétique) correspondent à un régime variable de fonctionnement du radiomètre : la température du bloc métallique et la densité de flux varient tous deux au cours du déplacement de l'appareil dans l'espace exploré .

L'étude théorique du régime variable de fonctionnement conduit , en posant

$$\theta'_o = \theta_o + \phi(t) \quad ; \quad \Phi(t) = \phi(t)\left[1 + \frac{k}{2}\phi(t)\right] \quad ; \quad v = \theta(r,z) - \theta_o$$

où θ'_o désigne la température du bloc métallique , $\phi(t)$ en constituant la partie variable :

1 - pour un disque d'épaisseur négligeable (variation exclusivement radiale de la température)

$$V(r) = \left[\frac{q\,a^2}{4\,K_o \ell} + \Phi(t)\right]\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\,J_1(\beta_n)\,J_o\left(\beta_n \frac{r}{a}\right)}{\beta_n^3\left[J_o^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n)\right]}\right)$$

2 - pour un disque d'épaisseur non négligeable (variation radiale et transversale de la température)

$$V(r,\ell) = \left[\frac{q\,a^2}{4\,K_o \ell} + \Phi(t)\right]\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\,J_1(\beta_n)\,J_o\left(\beta_n \frac{r}{a}\right)\beta_n \frac{\ell}{a} / \operatorname{sh} \beta_n \frac{\ell}{a}}{\beta_n^3\left[J_o^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n)\right]}\right)$$

On en déduit , pour la sensibilité de l'appareil , les expres-

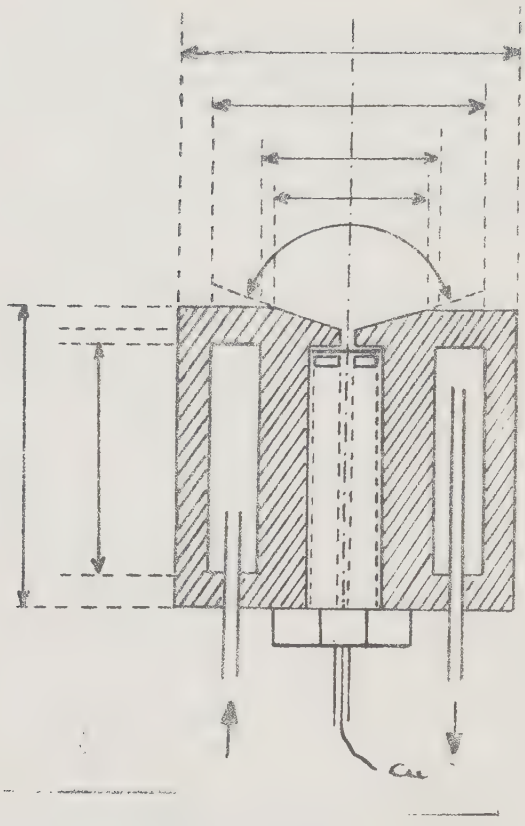
sions respectives :

$$(1)\quad \sigma = \alpha_o \left[\frac{\varepsilon_a^2}{4 K_o \ell} + \frac{\Phi(t)}{q_o}\right] \frac{v_m - \phi(t)}{v_m} \left[1 + \frac{k'-k}{2} v_m - \frac{k'}{2}\phi(t)\right] \left(1 + \frac{2}{ah'}\right)$$

$$(2)\quad \sigma = \alpha_o \left[\frac{\varepsilon_a^2}{4K_o \ell} + \frac{\Phi(t)}{q_o}\right] \frac{v_m - \phi(t)}{v_m} \left[1 + \frac{k'-k}{2} v_m - \frac{k'}{2}\phi(t)\right]$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\, J_1(\beta_n)\, \beta_n \frac{\ell}{a} \,/\, \mathrm{sh}\, \beta_n \frac{\ell}{a}}{\beta_n^3 \left[J_o^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n)\right]} \right)$$

Ces résultats indiquent une dépendance plus complexe de la sensibilité de l'appareil fonctionnant en régime variable vis-à-vis du flux incident, de la composante variable de la température du bloc métallique . Ils prévoient par ailleurs , selon l'ordre de grandeur de $v_m = \theta_m - \theta_o$ et de $\phi(t)$, l'obtention de courbes sans inversion $\left(v_m \gtrsim \phi(t)\right)$ ou présentant une inversion $\left(v_m < \phi(t)\right)$ de la f.e.m. thermoélectrique du thermocouple radiométrique . L'analyse des conditions concrètes d'utilisation de l'appareil (vitesse de défilement de l'ordre du mm/s , interception inévitable du rayonnement par la surface latérale et absorption partielle de ce dernier malgré le pouvoir réflecteur élevé de cette surface) et les caractéristiques géométriques et thermiques imposées par la réalisation de conditions optimales d'enregistrement (faible encombrement de l'appareil pour limiter la perturbation de la répartition du flux exploré , faible inertie thermique et constante de temps suffisamment petite pour l'égalisation de la température au sein du bloc métallique) conduisent à considérer l'observation d'une inversion de la f.e.m. thermoélectrique sur la courbe enregistrée comme un critère de construction et de fonctionnement satisfaisants de l'appareil .



3) Description de l'appareillage utilisé

a) Radiomètre .

Les résultats de l'étude théorique des deux régimes de fonctionnement de l'appareil et les observations faites au cours de nombreux essais expérimentaux ont conduit à retenir , en définitive , une construction du radiomètre qui correspond au schéma de la figure 9 .

Le thermocouple choisi étant le thermocouple cuivre-constantan , le corps de l'appareil est en cuivre et le disque récepteur en constantan .

L'interception du rayonnement incident par la surface latérale et la face portant le disque récepteur et les fortes densités de flux énergétiques étudiées ayant pour conséquence une absorption du rayonnement par la masse de l'appareil (malgré un pouvoir réflecteur élevé de ces surfaces obtenu par argenture) , un dispositif de réfrigération est indispensable pour réaliser une température de soudure froide variant peu pendant l'enregistrement des courbes expérimentales.

1 . Une circulation d'eau permet d'évacuer la chaleur absorbée par la surface externe du bloc de cuivre de l'appareil et contribue en même temps à maintenir l'ensemble de la masse (de cuivre) du radiomètre à une température voisine de la température extérieure et sensiblement constante . La faible inertie thermique de l'appareil (très bonne conductibilité thermique du cuivre et petite capacité calorifique du bloc de cuivre) permet de réaliser ces conditions avec les débits relativement faibles du courant d'eau de réfrigération (de l'ordre de 5 à 10 cm^3/s selon la pression de l'eau d'alimentation) , l'échauffement de l'eau étant de quelques degrés C .

2 . Le disque de constantan a un diamètre d'en-

viron 5 mm et provient de feuille de 1/10 mm d'épaisseur ou feuilles de 2/10 mm dont l'épaisseur a été réduite à la valeur convenable par attaque chimique et traitement mécanique suivis d'une vérification de l'uniformité de la tranche . Après un premier noircissement de la face réceptrice du disque obtenu par échauffement au fer à souder , on termine la réalisation de la surface absorbante en déposant une couche de noir de fumée . Le dépôt est ensuite soigneusement gratté à la lame sur une couronne périphérique de 2mm de largeur approximative , après soudure au centre de la deuxième face du disque d'un fil de cuivre émaillé de 1/10mm de diamètre . Une rondelle isolante et une tige isolante de polythène percée suivant son axe permettent d'obtenir un bon contact thermique et électrique entre le disque de constantan et la masse de cuivre par simple pression de la vis de serrage (également en polythène) sur la tige . On suit aisément l'amélioration de la qualité de contact et sa stabilité en observant à l'aide d'un ohmmètre (contrôleur Métrix par exemple) , la décroissance très nette de la résistance de contact et l'évolution de la résistance totale de l'appareil (fils de connection compris) . Pour un contact satisfaisant , cette dernière est fixe et prend une valeur variant entre 5 et 6 Ohm suivant la longueur de fil fin utilisée (2,50 à 3 m habituellement) . La section choisie pour le fil lui donne une faible inertie thermique et le soin apporté à la réalisation d'une soudure aussi ponctuelle que possible (soudure électrique ou effectuée par la méthode usuelle avec un très faible apport d'alliage) permettent d'admettre que l'influence du fil sur la répartition de température au sein du disque est négligeable .

3) Les deux bornes de l'appareil (bornes du thermocouple) sont constituées par l'extrémité du fil

soudé au disque de constantan d'une part , et de l'autre par celle d'un gros fil isolé (type fil de connection usuel) soudé à la partie centrale de la masse de cuivre (à une profondeur de l'ordre du demi cm) . Cette solution a été adoptée pour éliminer toute f.e.m. thermoélectrique parasite et garantir simultanément une plus grande robustesse de l'appareil qui demeure encore relativement fragile . Ces deux fils sont protégés : le fil fin par deux gaines concentriques de polythène de 2 mm et 3 mm de diamètre , le gros fil par une gaine (supplémentaire) de 4 à 5 mm de diamètre .

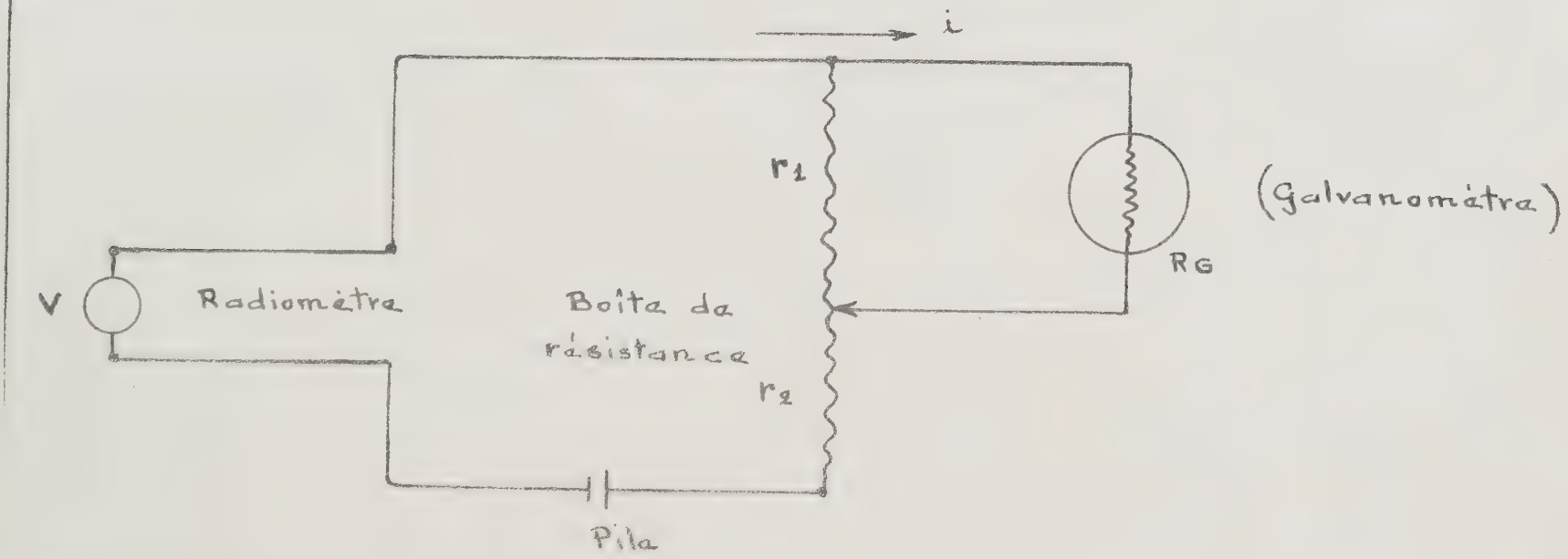
4) La surface externe du radiomètre est entièrement argentée (pouvoir réflecteur supérieur à 0,9) par le procédé dit "à la touche" .

b) Appareillage d'enregistrement

La f.e.m. thermoélectrique variable engendrée entre les bornes de l'appareil est appliquée (sans ou après réduction préalable) aux bornes d'un des oscillographes (choisi sur la base de sa sensibilité et de sa fréquence) d'un enregistreur BAUDOIN . La réduction est obtenue en utilisant une boite de résistances de 1,1 Ohm , la tension totale étant appliquées à la résistance totale , une fraction étant alors disponible aux bornes de la résistance variable (montage potentiométrique) . Le galvanomètre utilisé présentait les caractéristiques suivantes :

- Fréquence 52,5 Hz
- Résistance 49 Ohm
- Courant masimum mesurable 0,077 mA

La boite de résistances à été choisie de façon à permettre une simplification des calculs et l'obtention d'un courant galvanométrique suffisant .


i
r1
(Galvanomètre)
RG
V
Radiomètre
Boîte de
résistance
r2
Pile

L'ensemble du montage est schématiquement représenté sur la figure 10 .

4) Conduite des mesures

a) Etalonnage de l'appareil .

Bien que la linéarité de la courbe de réponse de ce type d'appareil ait été établie par les observations de nombreux auteurs dont R. GARDON[5] , H. BLAU[1] , P. GLASER[2] D.L. SIMMS , RW. PICKARD et P. HINKLEY[8] , J.L. MONTEITH[9] , nous avons procédé à un étalonnage du radiomètre en utilisant les grands flux énergétiques réalisés dans le plan focal du grand miroir horizontal du Laboratoire de MontLouis : le radiomètre , puis un des calorimètres décrits précédemment étaient successivement placés en un point de la tâche focale de ce miroir . L'ordre de grandeur des dimensions respectives de la tâche focale (20 cm de diamètre) et des surfaces de captation du rayonnement par le calorimètre (ouverture de 3 mm de diamètre) et le radiomètre (cercle de 1 mm de diamètre) permet avec une bonne approximation , de traiter le flux énergétique comme pratiquement constant sur les distances correspondantes. Les mesures ont été faites dans la zone centrale de la tâche focale (valeurs les plus élevées de flux énergétique) et dans la zone périphérique . Des essais préliminaires effectués avec le radiomètre se déplaçant dans la tâche focale ont permis de s'assurer de la validité de l'hypothèse relative à la variation du flux énergétique .

Les résultats expérimentaux (tableau ci-dessous) sont illustrés par la courbe d'étalonnage jointe (fig. 11)

TABLEAU I : Etalonnage du radiomètre

CALORIMETRE	I = Q/S	RADIOMETRE N	V	$C_r = \frac{V}{I}$
	620	111 mm	8,41 mV	0,0135
	356	63 mm	4,77 mV	0,0134
	252	45 mm	3,41 mV	0,0136

b) Conduite des Mesures

Le radiomètre , monté sur support se déplace dans le plan focal du miroir étudié d'un mouvement uniforme (vitesse de l'ordre du mm/s) compatible avec la constante de temps de l'appareil d'enregistrement (enregistreur BAUDOIN) et la dimension de la surface réceptrice . Les réglages optiques sont effectués comme dans le cas des mesures calorimétriques .

Le montage électrique de mesure est représenté schématiquement sur la figure 9 . Le courant galvanométrique i est déterminé par la relation

$$i = V \frac{\frac{r_1}{r_1+r_2}}{R_G + \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}}$$

avec $R_G \sim 100$ à $200\,\Omega$, si l'on choisit r_1 et r_2 de façon que

$$\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} \ll R_G$$

on pourra écrire

$$i \simeq \frac{V}{R_G} \frac{r_1}{r_1+r_2}$$

Ces conditions sont réalisées en adoptant pour les résistances r_1 et r_2 les deux bras d'une boite de résistance de valeur totale $1{,}1\,\Omega$. Dans ces conditions on a :

$$\delta R_G = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} \leqslant \frac{0{,}3025}{1{,}1} = 0{,}275$$

$$\frac{\delta R_G}{R_G} \leqslant 0{,}0056 \qquad (R_G = 50\,\Omega)$$

$$\frac{\delta R_G}{R_G} \leqslant 0{,}0028 \qquad (R_G = 100\,\Omega)$$

5) Précision des résultats

$$\left|\frac{\delta V}{V}\right| \leqslant \left|-\frac{\delta r_1}{r_1} + \frac{\delta(r_1+r_2)}{r_1+r_2}\right| + \left|\frac{\delta i}{i}\right| + \left|\frac{\delta R_G}{R_G}\right| =$$

$$= \left|\frac{\delta r_1}{r_1}\right| + \left|\frac{\delta i}{i}\right| + \left|\frac{\delta R_G}{R_G}\right|$$

L'ordre de grandeur des différentes incertitudes relatives conduit à ne retenir que celle se rapportant à la mesure de l'intensité . Si l'on tient compte de l'incidence des approximations faites dans le traitement théorique

$$\left|\frac{\delta V}{V}\right| \sim 1,5 \quad \text{à} \quad 3\ \%$$

b) Incertitude sur la constante d'étalonnage de l'appareil .

On peut considérer que l'incertitude relative totale est la somme des incertitudes relatives correspondants aux résultats de mesure du calorimètre et du radiomètre .

$$\left|\frac{\delta V}{V}\right| - \left|\frac{\delta Ic}{Ic}\right| \leqslant \left|\frac{\delta Cr}{Cr}\right| \leqslant \left|\frac{\delta V}{V}\right| + \left|\frac{\delta Ic}{Ic}\right| \sim 5\%$$

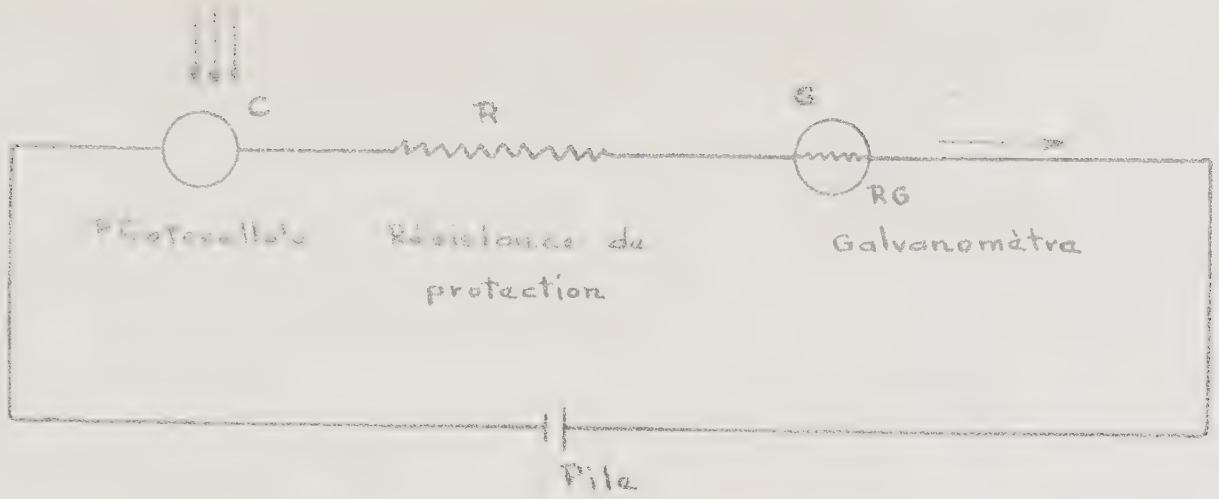
$Cr = \frac{V}{I_c}$ constante d'étalonnage de l'appareil .

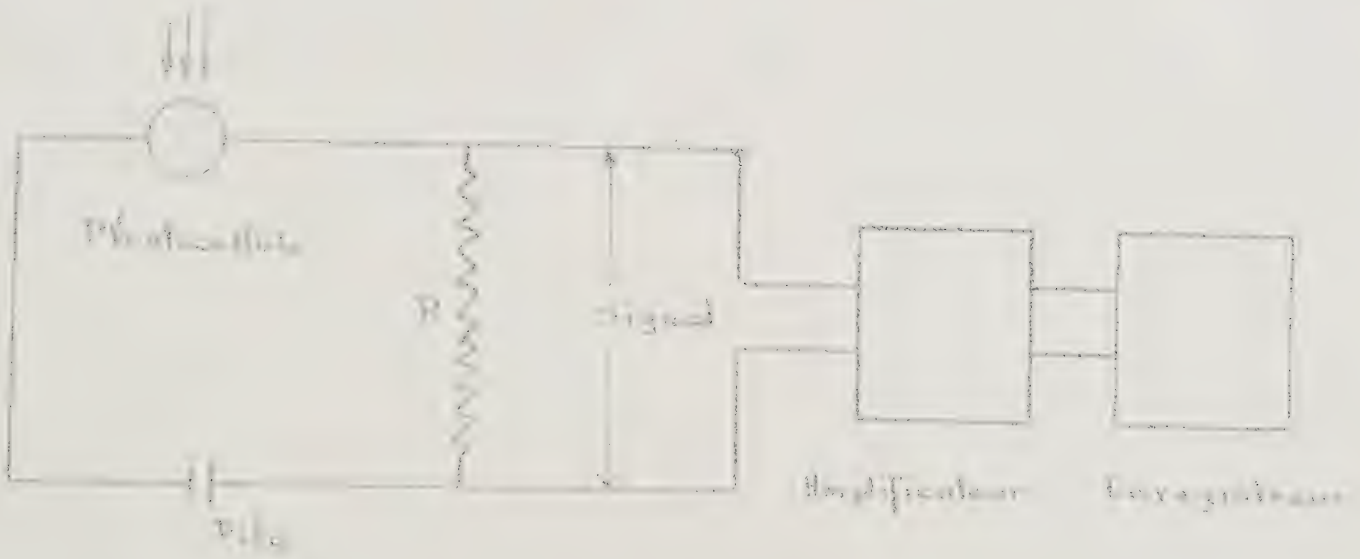
C) METHODE PHOTOMETRIQUE

1º) Description du dispositif de mesure .

La partie essentielle du dispositif de mesure est une microphotodiode planar passivée au silicium type 34 F2 (à structure NPN planar passivée) . Les dimensions géométriques sont indiquées sur la figure et ses caractéristiques de fonctionnement les suivantes (tension d'alimentation de 24 volts).

- Diamètre de la surface réceptrice 1 mm


C
R
G
RG
Photocellule
Résistance de protection
Galvanomètre
Pile


R
Signal
Pile

- Longueur d'onde de sensibilité maximale.... 0,9 μ
- Temps de réponse ..... 1 μs
- Sensibilité nominale (2500 lux) 0,16μA/lux
- Valeur maximale du courant d'obscurité à 25º C 0,05μA
- Valeur nominale du courant d'obscurité à 25º C ..... 0,01μ A
- Résistance d'obscurité ..... $\sim$2000 MΩ
- Tension d'alimentation ..... 24 V

La photodiode est montée sur un support se déplaçant dans le plan focal du miroir étudié avec une vitesse de l'ordre de 1 à 3 mm/s . Le faible diamètre de sa surface réceptrice permet de réaliser des conditions assez satisfaisantes de mesure de densité vraie de flux lumineux dans le plan focal du miroir réglé sur le disque lunaire par nuit de pleine lune .

Le courant photoélectrique est mesuré directement par un galvanomètre , (une résistance de protection R étant adjointe dans le circuit) , ou amplifié préalablement . Les deux montages correspondent aux schémas des figures 12 et 13 .

2º) Conduite des Mesures .

a) Un réglage optique effectué en diaphragmant fortement le miroir pointé sur le soleil , permet d'assurer le déplacement du support de la photodiode de façon à ce que sa face tournée vers le miroir coïncide constamment avec le plan focal . En même temps le centrage du dispositif est réalisé avec soin pour garantir une trajectoire radiale de la photodiode dans son parcours de la tâche focale .

b) La cellule est montée sur le support suivant l'un des deux schémas de mesure du courant photoélectrique

et le miroir pointé sur le disque lunaire par nuit de pleine lune . L'appareil enregistreur est soit un BAUDOIN (mesure directe) soit un ELECTROSYNTHESE (mesure après amplification préalable) . Le mouvement de translation du support de la photodiode est obtenu par un dispositif comportant un moteur , un système démultiplicateur et une barre filetée (vis sans fin) portant le support . L'enregistrement dure quelques secondes (4 à 5) pendant lesquelles le réglage optique peut être considéré comme stable avec une approximation satisfaisante .

3º) Précision des résultats .

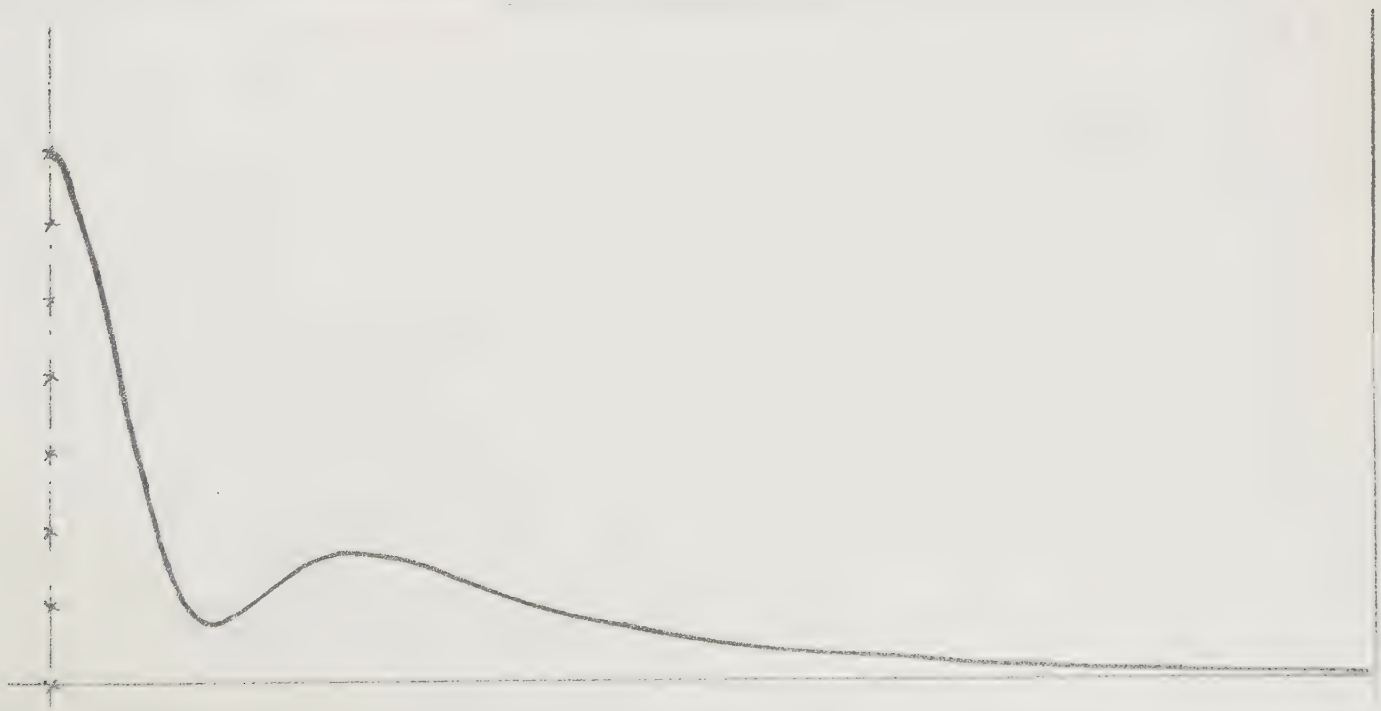
Compte tenu des caractéristiques de la microphotodiode utilisée , la précision des résultats est déterminée par l'appareil enregistreur . En fait , l'ordre de grandeur notable du temps de réponse du dispositif suiveur de spot n'a pas permis d'utiliser toute la largeur du ruban d'enregistrement ; le tracé des courbes photométriques correspond , dans ces conditions , à une précision assez médiocre (8 à 16 %) pour les valeurs relatives de la densité de flux observée en dehors de l'image de Gauss de la pleine lune .

Quoi qu'il en soit , les enregistrements conduisent à une définition largement suffisante des positions et ordre de grandeur du minimum et du maximum secondaire de la densité de flux ; ils permettent une mise en évidence très nette de l'existence du maximum secondaire prévu théoriquement.

III - RESULTATS EXPERIMENTAUX

A) Méthode calorimétrique

B) METHODE RADIOMETRIQUE



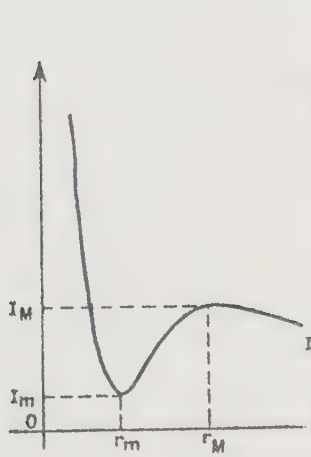


Fig. 5.

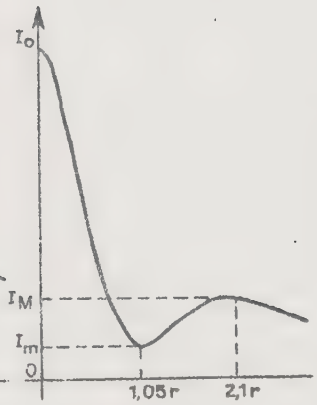


Fig. 6.

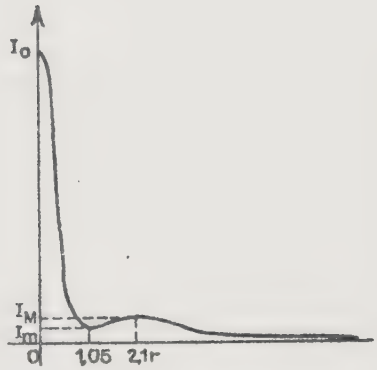


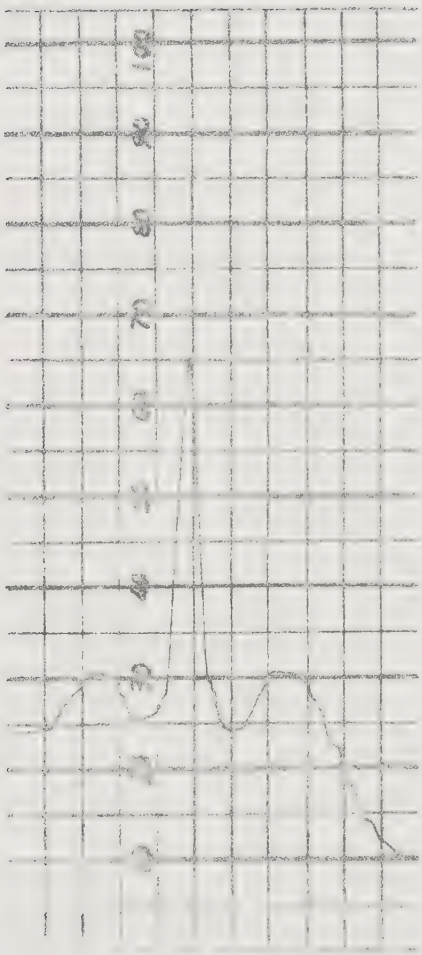
Fig. 7.

Fig. 5. — Courbe « radiométrique » relative au même miroir de 1,50 m : la f. é. m. thermoélectrique n'étant pratiquement pas réduite avant l'enregistrement; $r_M/r_m \sim 2$, $I_M/I_m \simeq 3{,}25$.

Fig. 6. — Courbe « radiométrique » enregistrée à Montlouis : miroir de 2 m de diamètre et 0,85 m de distance focale; $I_m/I_o = 0{,}$ $I_M/I_o = 0{,}23$.

Fig. 7. — Courbe « radiométrique » relative à un second miroir de 2 m enregistrée à Montlouis. $I_m/I_o = 0{,}05$, $I_M/I_o = 0{,}09$.

C) METHODE PHOTOMETRIQUE



D) COMPARAISON DES RESULTATS EXPERIMENTAUX OBTENUS PAR LES DIFFERENTES METHODES DE MESURE UTILISEES. DISCUSSION ET CONCLUSIONS .

La comparaison des courbes expérimentales relatives au même ou à différents miroirs paraboliques conduit aux observations suivantes :

1 . Pour le type de miroir parabolique étudié (miroirs de projecteurs de D.C.A. de construction allemande) et dans les limites de la précision respective des trois méthodes mises en oeuvre , les résultats expérimentaux concordent de manière satisfaisante : allure générale de la courbe de répartition de l'énergie dans le plan focal , particularités propres au profil de la courbe dans les régions centrale (décroissance brutale de type exponentiel) et périphérique (existence d'un minimum suivi d'un maximum secondaire de la densité de flux énergétique dans le plan focal) , ordres de grandeur respectifs des valeurs du maximum central (foyer géométrique du miroir) , du minimum et du maximum secondaire .

2 . Pour ce qui est de la zone centrale de l'image focale , les résultats expérimentaux sont en tous points comparables à ceux , relatifs à divers miroirs du même type , obtenus antérieurement par différents auteurs en utilisant les mêmes méthodes de mesure : ordre de grandeur du maximum central de la densité de flux énergétique (foyer géométrique) , allure générale de la courbe .

3 . Les résultats expérimentaux relatifs à la zone périphérique de la tache focale , du fait de la mise en évidence du minimum et du maximum secondaire de la densité de flux énergétique (méthodes radiométrique et photométrique) se distinguent de ceux publiés antérieurement , exception faite

de la "courbe photométrique" de R. APARISSI , sur laquelle le maximum secondaire a été observé pour la première fois .

4 . Dans les limites de la précision des mesures effectuées par les méthodes utilisées , les valeurs absolues et relatives (rapportées à celle du maximum central de la densité de flux énergétique) , et les positions respectives du minimum et du maximum secondaire déduites des résultats expérimentaux concordent de façon satisfaisante . On observe notamment que le minimum se situe , pour l'ensemble des miroirs étudiés , à une distance du foyer géométrique sensiblement égale au rayon de l'image de Gauss de la source du rayonnement incident (soleil ou pleine lune) ; le maximum secondaire correspond à une distance approximativement double de la précédente . Cependant , d'un miroir à l'autre , les valeurs absolues et relatives (au sens précisé plus haut) du minimum et du maximum secondaire de la densité de flux énergétique dans le plan focal , ainsi que leur rapport varient notablement (ce dernier entre 1/2 et 1/3 pour les miroirs étudiés) . Ces résultats traduisent la variation de la "précision" d'un miroir à l'autre - il serait préférable de parler d'une variation des qualités optiques macro et microgéométriques - dans la mesure où les résultats correspondants , pour un miroir donné , ne dépendent pratiquement pas de la source du rayonnement incident . L'incidence de l'utilisation d'un héliostat ne paraît notable que sous l'angle des valeurs absolues (nettement réduites pour des raisons évidentes) de la densité de flux dans le plan focal , du moins pour un réglage soigné des facettes constituant l'héliostat .

B I B L I O G R A P H I E

(1) H. BLAU Measurement of flux , emittence and related properties . Proceedings of an International Symposium on High Temperature Technology . Mc Graw Hill - Stanford Research Institute 1960 p 45 .

(2) P. GLASER High radiation flux absolute water flow calorimeter Rev. Sci. Instr. vol 28 , 1957 p 1084 ; Industrial applications - The challenge to solar energy research E/CONF. 35/S16 United Nations Conference on New Sources of Energy , Rome 21-31 August 1961 ; Essais d'emploi du four à image dans la calorimétrie des hautes températures Applications thermiques de l'énergie solaire dans le domaine de la recherche et de l'industrie C N R S 1961 p 215 .

(3) B. G. TUNMORE A simple radiometer for the measurement of radiative heat exchange between buildings and the environment . Jour. Sci. Instr. vol 39 , 1962 p 219 .

(4) F. TROMBE , M. FOEX et M^{lle} LA BLANCHETAIS Conditions de réception de l'énergie solaire au foyer d'un miroir parabolique . Applications thermiques de l'énergie solaire C N R S 1961 p 175 .

(5) R. GARDON An instrument for the direct measurement of intense thermal radiation Rev. Sci. Instr. vol 24 , 1953 , p 366 .

(6) A. MOUMOUNI Analyse des particularités du fonctionnement des radiomètres thermoélectriques à disque récepteur absorbant en régime permanent Int. Jour. Heat and Mass Transfer

(7) A. MOUMOUNI Sur le fonctionnement en régime variable du radiomètre thermoélectrique à disque récepteur absorbant Int. Jour. Heat and Mass Transfer

(8) D.L. SLIMMS , R.W. PICKARD and P. HINKLEY Modified Moll thermopiles for measuring thermal radiation of high intensity Jour. Sci. Instr. vol 39 , Nº 35 (1962) p 204 ; An absolute radiometer for the range 0,1 - 2,5 cal/cm^2.s Jour. Sci. Instr. Vol 40 , 1963 p 216 .

(9) J.L. MONTEITH Solarimeter for field use Jour. Sci. Instr. vol 36 , 1959 P p 341

QUATRIEME PARTIE

COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX DISCUSSION ET CONCLUSIONS .

DISCUSSION DES CONDIDIONS D'APPLICABILITE DU TRAITEMENT THEORIQUE PROPOSE AU CAS DES MIROIRS PARABOLIQUES REELS (MACROGEOMETRIE NON RIGOUREUSEMENT PARFAITE) .

1 . Le traitement théorique suppose une macrogéométrie parfaite de la surface du miroir, une tâche focale de dimensions latérales suffisamment faibles pour qu'en un quelconque de ses points l'on ait $\frac{r}{f} \ll\ll 1$ (r distance du point au foyer du miroir , f distance focale) , enfin une qualité optique (dimensions des "grains de relief" de la surface) telle que l'ordre de grandeur des rayons angulaires des deux premiers anneaux de diffraction , corresponde à une déviation infinitésimale du rayonnement "réfléchi" .

2 . Dans le cas de miroirs paraboliques précis de différents types - projecteurs de D.C.A. , grands miroirs à facettes de verre courbées ou polies ou à éléments en tôle d'aluminium - des angles d'écart variant entre une fraction de minute d'arc et 5 à 6' d'arc ont été estimés ou mesurés par différents auteurs (F. TROMBE[1] , LE PHAT VI NH[2] , MARKOV[3] , O. KAMADA et COLL[4]) . On peut admettre , sur cette base , pour les miroirs paraboliques précis du type "projecteur de D.C.A." à optique de verre poli argenté - ou aluminisé - ou en métal poli rendu bon réflecteur , une valeur moyenne de l'angle d'écart au plus égale à 2 - 3' d'arc . La contribution des imperfections macrogéométriques à la redistribution spatiale du rayonnement incident après "réflexion" par la surface du miroir est alors faible , compte tenu de la valeur notablement

plus importante du demi-diamètre apparent de la source (32' d'arc environ pour le soleil et la lune pour une déviation totale de 4 - 6' introduites par les imperfections macrogéométriques) , pourvu toutefois que les rayons angulaires des anneaux de diffraction soient d'un ordre de grandeur suffisant.

3 . L'importance du rôle joué par la qualité optique de la surface est évidente :

a . Pour les surfaces de bonne qualité optique - "grains de relief" de rayon moyen variant entre quelques dizaines de microns et quelques dixièmes de mm - les rayons angulaires des deux premiers anneaux de diffraction , pour des radiations de longueur d'onde $\lambda = 1\mu$ (milieu du spectre) sont d'un ordre de grandeur compris entre $1,5.10^{-2}$ ($a = 40\mu$) et $0,61.10^{-2}$ ($a = 0,1$ mm) radian et satisfont alors aux différentes conditions énoncées précédemment .

b . Pour les surfaces de qualité optique moyenne ou courante - "grains de relief" de rayon moyen variant entre quelques microns et une dizaine de microns - on obtient , en utilisant la même valeur de la longueur d'onde ($\lambda = 1\mu$) pour l'ordre de grandeur des rayons angulaires des deux premiers anneaux de diffraction une valeur comprise entre 0,2 radian ($a = 3\mu$) et 0,06 radian ($a = 10\mu$) . L'hypothèse d'une petitesse de l'angle de diffraction est alors manifestement et grossièrement incorrecte . Au contraire , la condition relative à la prépondérance du phénomène de diffraction - devant l'effet de la déviation angulaire dûe aux imperfections macrogéométriques - dans la détermination de la redistribution spatiale du rayonnement incident est parfaitement satisfaite .

Les conditions requises pour l'application du traitement théorique proposé sont donc réalisées de façon

satisfaisante par les miroirs paraboliques précis possédant une surface de bonne qualité optique . Dans le cas de miroirs à surface de qualité optique moyenne ou courante , nonobstant la précision de la macrogéométrie , les calculs théoriques correspondent au mieux à une première approximation qui se révèlera d'ailleurs largement suffisante sur le plan protique , comme on le verra plus loin .

4 . Les miroirs paraboliques de précision macrogéométrique moyenne ou médiocre (angle d'écart ayant une valeur comprise entre quelques dizaines de minutes d'arc et 1 à 2º) et à surface de qualité optique courante , ne relèvent du traitement théorique proposé qu'en termes d'une approximation apparemment grossière (assimilation de la forme macrogéométrique à celle de la surface parfaite) , bien que la diffraction par les "grains de relief" joue encore un rôle prépondérant dans la la redistribution spatiale du rayonnement "réfléchi" . Cependant pour les valeurs courantes de l'ouverture angulaire , compte tenu de la provenance d'une fraction importante (de l'ordre de 2/3 à 3/4) du rayonnement "réfléchi" de régions de la surface du miroir correspondant à une valeur notable de l'angle d'incidence , l'influence des imperfections macrogéométriques se trouvera notablement atténuée . La tentative que représente l'application de traitement théorique proposé pourra , de ce fait , se révéler bien plus fructueuse qu'il ne semblait à priori

Malgré les incohérences ou contradictions apparentes éventuelles (miroirs de précision macrogéométrique et de qualité optique de surface moyennes) , on pourra donc appliquer le traitement théorique proposé à une large gamme de miroirs paraboliques . Bien entendu , l'approximation

ainsi obtenue dans la description des faits observables sera d'autant meilleure que le miroir approchera plus de la perfection macrogéométrique et optique .

II COMPARAISON DES COURBES THEORIQUES ET EXPERIMENTALES DE REPARTITION DE L'ENERGIE DANS LE PLAN FOCAL .

A) Détermination préalable du rayon moyen des "grains de relief" de la surface du miroir par une méthode phénoménologique .

Le tracé des courbes théoriques exige la connaissance de la valeur du rayon moyen des "grains de relief" de la surface du miroir étudié . Une détermination directe se heurte à des difficultés pratiquement insurmontables : prélèvement d'un échantillon ce qui suppose la destruction , au mieux une mutilation du miroir , et ne peut conduire qu'à un résultat inconsistant avec la définition (d'ailleurs mathématiquement peu précise mais portant sur la surface entière du miroir) du rayon moyen des "grains de relief" .

La procédure suivante , basée sur la confrontation des valeurs théorique et expérimentale de la densité de flux énergétique au foyer géométrique permet d'obtenir une valeur approchée du paramètre a :

1 . On remarque qu'en dehors de toute hypothèse sur la courbe de répartition spectrale de l'énertie du rayonnement incident

$$I(o) = I_m = 3\mathcal{O}_o \operatorname{tg}^2 \frac{U_m}{2} \frac{\cos^3 \frac{U_m}{2}}{1-\cos^3 \frac{U_m}{2}} \int_o^\infty E_\lambda \, R_\lambda \left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^2 d\lambda$$

$$= 3\pi^2 a^2 \mathcal{O}_o \operatorname{tg}^2 \frac{U_m}{2} \frac{\cos^3 \frac{U_m}{2}}{1-\cos^3 \frac{U_m}{2}} \int_o^\infty E_\lambda \frac{R_\lambda}{\lambda^2} d\lambda$$

L'intégrale , susceptible d'une évaluation graphique , peu-t être obtenue avec une précision suffisante en limitant la c-ourbe de répartition spectrale aux valeurs λ_m et λ_M de la longueur d'onde des radiations incidentes telles que l'expression $E_\lambda R_\lambda / \lambda^2$ prenne des valeurs toutes négligeables , pour $\lambda < \lambda_m$ et $\lambda > \lambda_M$. En outre R_λ est peut être considéré comme constant dans la pratique (rayonnement solaire ou lunaire , surface argentée ou aluminisée) .

$$\int_{\lambda_m}^{\lambda_M} \frac{E_\lambda R_\lambda d\lambda}{\lambda^2} \quad \# \quad R_m \int_{\lambda_m}^{\lambda_M} \frac{E_\lambda \, d\lambda}{\lambda^2}$$

Posant

$$\mathcal{Y} = \int_{\lambda_m}^{\lambda_M} E_\lambda \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

on a

$$I_m = 3 R_m (\pi a)^2 \alpha_0 \, tg^2 \frac{U_m}{2} \frac{\cos^3 \frac{U_m}{2}}{1-\cos^3 \frac{U_m}{2}} \mathcal{Y}$$

2 . La connaissance des valeurs respectivement mesurées de I_m , R_m , $\mathcal{Y}$, U_m , et calculées de $\alpha_0(U_m)$, $tg \frac{U_m}{2}$, $\cos \frac{U_m}{2}$ permet d'obtenir

$$a = \left[\frac{I_m}{3 \mathcal{Y} R_m \pi^2} \cdot \frac{1-\cos^3 \frac{U_m}{2}}{\cos^3 \frac{U_m}{2}} \cdot \frac{1}{\alpha_0 tg^2 \frac{U_m}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

L'intégrale $\mathcal{Y}$ a été calculée à partir des données de PARRY MOON[5] et N.B. REKANT[6] pour une atmosphère de masse optique $m = 1,5$ (intensité du rayonnement solaire incident proche de 1 kw/m^2) . On obtient ainsi

$$\mathcal{Y} = 2028 \text{ W/ m}^2 . \mu^2$$

3 . A partir de la valeur ainsi déterminée du paramètre a il est possible de déterminer la longueur d'onde λ_e définie par la relation

$$\gamma = \int_{\lambda_m}^{\lambda_M} \frac{E_\lambda \, d\lambda}{\lambda^2} = \frac{E_{\lambda_e}}{\lambda_e^2} (\lambda_M - \lambda_m)$$

longueur d'onde dont la connaissance permet , jointe à celle de a , de tracer les courbes théoriques correspondant à l'approximation exponentielle . Pour $m = 1,5$, $\lambda_m = 0,32\,\mu$ $\lambda_M = 1,85\,\mu$ on trouve $\lambda_e = 0,5\,\mu$.

B) Comparaison des courbes théoriques et expérimentales.

La comparaison sera faite pour deux miroirs que nous avons étudiés à MontLouis et trois autres pour lesquels les résultats expérimentaux ont été publiés par R. APARISSI , F. TROMBE , M. FOEX et Melle LA BLANCHETAIS , B.V. TARNIJEVSKI et coll. , R.A. ZAKHIDOV et D.I.TEPLIAKOV .

Suivant le cas , la courbe théorique confrontée aux données expérimentales sera la courbe à maximum secondaire , celle de l'approximation exponentielle ou toutes deux concurremment .

1 . Données relatives à deux miroirs paraboliques GU-2 étudiés par R. APARISSI

a) Miroir parabolique GU-2 du type projecteur de D.C.A.

- Caractéristiques géométriques et optiques :

$p = 2\,f = 1,694$ m

$D = 2\,R = 2,05$ m

$U_m = 61° 52'$

$R_m = 0,9$

Valeur calculée de a : 0,057 mm

- Tableau des résultats expérimentaux (R. APARISSI Kand. Dissert. p 88)

r_{mm}	10^6 k×cal/m^2.h	I(r) kw/cm^2	$\varepsilon(r) = I(r)/I_o$
0	30,4	3,53	1
0,75	29,0	3,37	0,954
2,00	20,25	2,35	0,666
3,75	5,02	0,58	0,165
6,25	1,55	0,18	0,051
8,75	3,20	0,37	0,105
13,00	0,88	0,10	0,029

- Résultats théoriques correspondant à l'approximation exponentielle $I(r) = I_o \exp(-Cr^2)$.

$I_{o\ th} = 30,4.10^6$ k cal/m^2.h = 3,53 kw/cm^2

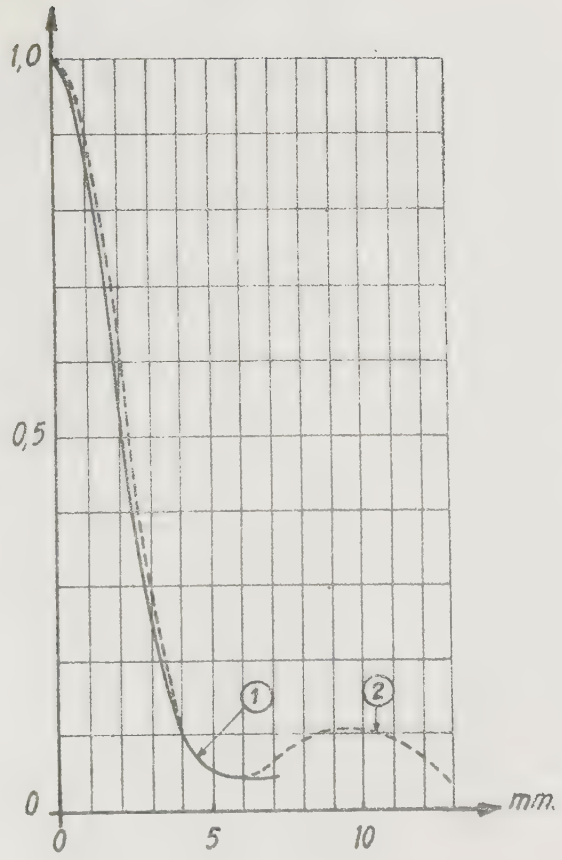
$$C = 2(\pi_a/\lambda_e)^2/p^2 = \frac{2.3,14^2.122^2}{1,694^2.10^6} \quad mm^{-2} = 1,024\ mm^{-2}$$

$$\frac{a}{\lambda_e} = 122$$

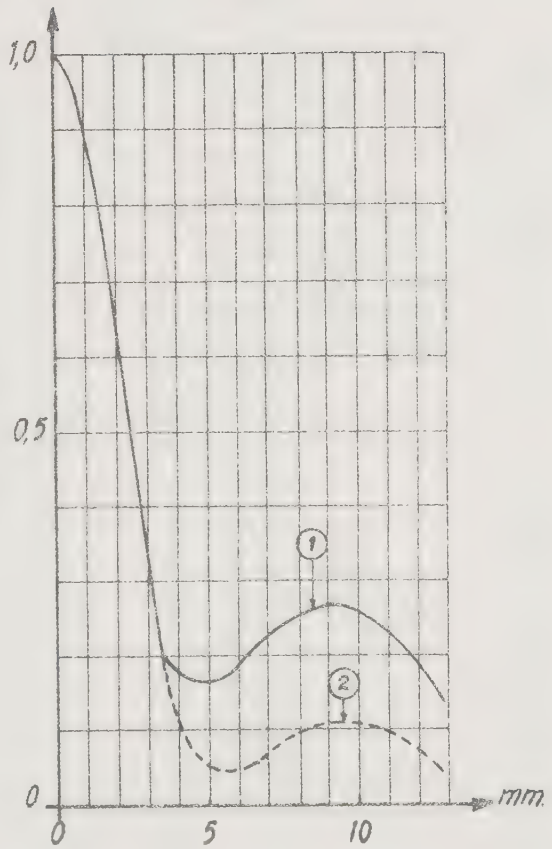
Tableau de variation de $I(r)/I_o = \varepsilon(r) = e^{-Cr^2} = e^{-\eta^2}$

r_{mm}	$\eta = \frac{\pi a}{\lambda_e}\frac{r}{p}$	$\varepsilon(r)_{théorique}$	$\varepsilon(r)_{expérimental}$
0	0	1	1
0,75	0,188	0,93	0,96
2,00	0,50	0,61	0,67
3,75	0,96	0,16	0,17
4,80	1,20	0,06	0,06
6,25	1,56	0,01	0,05

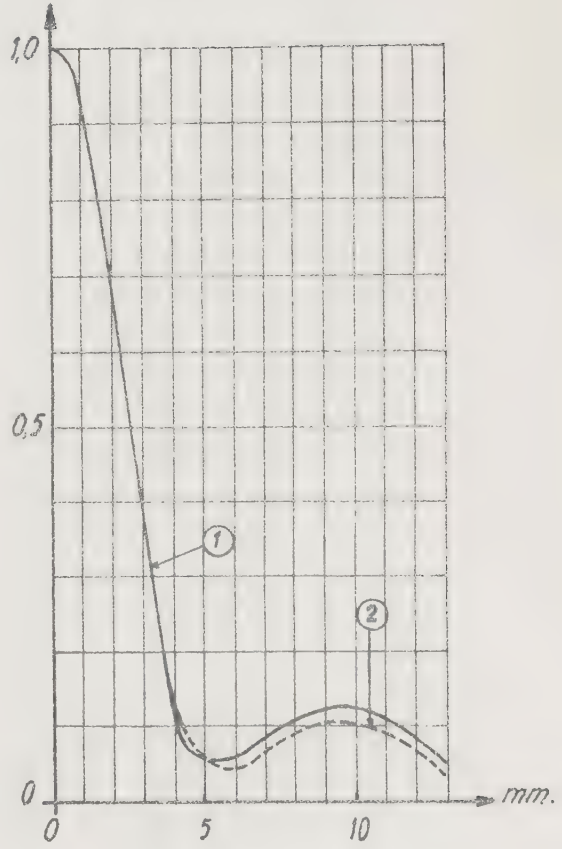
1a



1b



1c



① Courbes théoriques

② Courbes expérimentales

Les résultats sont illustrés par les courbes de la figure 1 a .

Résultats théoriques correspondant à l'assimilation du rayonnement incident à celui d'un corps noir à la température $T_s = 5200°$ K ($m = 1,5$) dans le cas d'un faiseur incident rigoureusement parallèle .

$$I_{o\ th} = \begin{cases} \frac{16}{21}\pi^9 \frac{k^6 T_s^6}{h^5 c^4} R_m\ a^2 \alpha_o\ tg^2 \frac{U_m}{2} \sin^2\varphi_o \cos^3 \frac{U_m}{2} \Big/ 1-\cos^3 \frac{U_m}{2} & \text{(a)} \\ 720\pi^3 \Delta_5 \frac{k^6 T_s^6}{h^5 c^4} R_m\ a^2 \alpha_o\ tg^2 \frac{U_m}{2} \sin^2\varphi_o \cos^3 \frac{U_m}{2} \Big/ 1-\cos^3 \frac{U_m}{2} & \text{(b)} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{(a)} \quad 4,25\ kw/m^2 \\ \text{(b)} \quad 3,62\ kw/m^2 \end{cases}$$

Compte tenu des résultats obtenus précédemment (2e partie Chap. V) pour les valeurs et positions respectives des extrema secondaires , la courbe théorique est celle numérotée 1 sur la figure 1 b .

- Résultats théoriques correspondant à la prise en considération du diamètre apparent de la source .

Le calcul numérique des intégrales

$$\alpha_{o_k} = \pi \int_{\cos \frac{U_m}{2}}^{1} t^{2k+2} (2t^2-1)^{2k+1}\, dt$$

donne pour $U_m = 60°$

$e_{o1} = 0,580$ $\quad e_{o2} = 0,392$ $\quad e_{o3} = 0,293$ $\quad e_{o4} = 0,233.....$

$h_1 = 0,2394$ $\quad h_2 = 0,018324$ $\quad h_3 = -0,0003072$ $\quad h_4 = +0,0001247$

$\alpha_{o1} = 1,554$ $\quad \alpha_{o2} = 4,2044$ $\quad \alpha_{o3} = 0,298$ .....

$\alpha_o = 1 - 1,554\ \alpha^2 + 4,2044\ \alpha^4 - 0,298\ \alpha^6 + ...$

Pour $T_s = 5200°$ K (m = 1,5) , a = 0,057 mm $\alpha = 0,300$ ce qui donne $\alpha_o = 0,900$. La densité de flux énergétique au foyer est donc réduite du dixième de sa valeur . En admettant compte tenu du faible diamètre de l'image focale , que la correction garde la même valeur , on obtient

$$I_{max} = 3,62 \times 0,9 \text{ kw/cm}^2 = 3,26 \text{ kw/cm}^2$$

$$I_{min} = 3,62 \times (0,167 - 0,1) = 3,62 \times 0,067 \text{ kw/cm}^2$$
$$= 0,24 \text{ kw/cm}^2$$

$$I_{max} = 3,62 \ (0,217 - 0,1) = 3,62 \times 0,117 \text{ kw/cm}^2$$
$$= 0,42 \text{ kw/cm}^2$$

Les courbes théorique et expérimentale (figure 1 c) sont en accord satisfaisant et l'écart entre les valeurs calculées et mesurées du maximum absolu de la densité de flux énergétique moindre que 6 % . On obtient pour $\frac{I_{min}}{I_{max}}$ et $\frac{I_{max}}{I_{max}}$ les valeurs théoriques respectives de 0,067 et 0,117 au lieu de 0,051 et 0,105 .

b) Miroir parabolique "G-U-10" à carcasse de béton et surface réflectrice constituée par des glaces courbées par contrainte mécanique .

Caractéristiques géométriques et optiques

$p = 2 f = 10,72$ m

$D = 2 R = 10$ m

$U_m = 49°42'$

$R_m = 0,75$

Valeur calculée de a : 0,020 mm

Tableau des résultats expérimentaux (R. APARISSI , Kand. Dissert. p 85) .

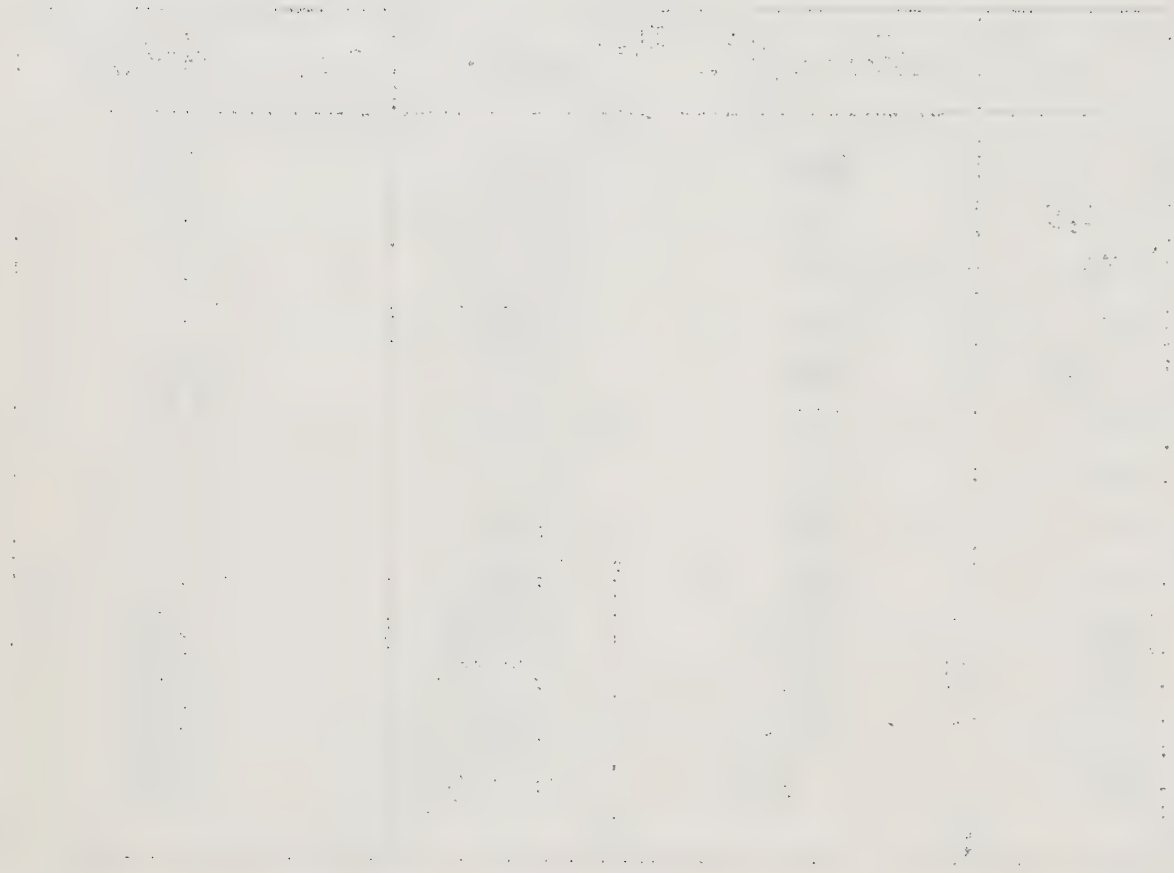
r_{mm}	$10^3 \times$ kcal/m^2.h $I(r)$	kw/cm^2	$\mathcal{E}(r) = \frac{I(r)}{I_o}$ (%)
0	800	0,0929	100
12,5	798	0,0927	99,75
39	692	0,0803	86,50
50	614	0,0713	76,75
70,5	514	0,0597	64,25
100	373	0,0433	46,63
141	177	0,0206	22,13
150	200	0,0232	25,0
200	127	0,0147	15,88
250	59,1	0,00686	7,39
300	30,0	0,00348	3,75
350	13,2	0,00153	1,59
423	6,8	0,000790	0,85

- Résultats théoriques correspondant à l'approximation exponentielle ($I(r) = I_o \exp(-Cr^2)$)

$$\frac{a}{\lambda_e} = 72,2 \qquad C = 2\left(\frac{\pi a}{\lambda_e}\ \frac{1}{p}\right)^2 = 0,89 \text{ cm}^{-2}$$

Tableau de variation de $\mathcal{E}(r) = I(r)/I_o = e^{-2\eta^2}$

r_m	$\eta = \frac{\pi a}{\lambda_e}\ \frac{r}{p}$	$\mathcal{E}(r)$ valeur théorique		$\mathcal{E}(r)$ valeur expérimentale
0	0	(1)	1	1
3,9	0,254	(0,91)	0,88	0,87
5,0	0,325	(0,86)	0,81	0,77
7,05	0,456	(0,75)	0,66	0,64
10,0	0,650	(0,65)	0,43	0,47
14,1	0,915	(0,29)	0,22	0,22



A titre de base de comparaison, les valeurs théoriques correspondant à la courbe exponentielle de R. APARISSI ont été indiquées entre parenthèses. Les écarts dans la zone centrale de l'image focale, entre les courbes théorique et expérimentale (fig. 2) sont nettement moins importants dans le cas de l'approximation actuelle.

La qualité optique de la surface du miroir G-U-10 ne permet pas de lui appliquer les résultats théoriques, compte tenu des hypothèses faites (en particulier, perfection macrogéométrique de la surface).

2. Données relatives à deux miroirs paraboliques du type "projecteur de D.C.A." de MontLouis.

a) Miroir parabolique directement orientable de 150 m. de diamètre.

Caractéristiques géométriques et optiques :

$$f = \frac{p}{2} = 640{,}2 \text{ mm}$$

$$D = 2R = 1{,}500 \text{ m}$$

$$U_m = 60° 44'$$

$$R_m = 0{,}90$$

Les enregistrements radiométrique et photométrique (fig. 3a et 3b) illustrent la variation de la densité de flux énergétique dans le plan focal. Les résultats des mesures calorimétriques (intensité du rayonnement solaire incident sensiblement égale à 1 kw/m2) sont reproduits dans le tableau ci-dessous.

- Tableau de variation de la densité moyenne de flux énergétique :

r_{mm}		1,013	1,525	2,500	3,445	4,475	5,453	6,468	7,438
Energie	cal/s	23,90	49,20	123,0	150,0	183,9	201,8	244,5	269,6
Encerclée	w/s	100,3	206,5	516,0	630	752	845	1066	1130
Densité	cal/cm²s	742	674,0	628	402	292,0	216,1	185,4	155,2
Moyenne	w/cm2	3,120	2,83	2,64	1,69	1,22	0,91	0,78	0,65

Tableau de variation de la densité d'énergie vraie

r_{mm}		0	1,269	2,013	2,973	3,960	4,964	5,961	6,953
Densité vraie D'énergie		765	619,6	427	268	131	63,5	109	59,5
	kw/cm^2	3,2	2,60	1,833	1,12	0,55	0,266	0,457	0,248

- Résultats théoriques (approximation de rayons incidents rigoureusement parallèles) .

A partir de la valeur extrapolée de $I_{max} = 3,2$ kw/cm^2 l'utilisation de la procédure employée précédemment conduit pour a à la valeur :

$$a = 0,054 \text{ mm}$$

En adoptant la valeur $T_s = 5300°K$ (m = 1,2) on obtient pour

$$I_{max} = 16\pi^9 \frac{k^6 T_s^6}{h^5 c^4} \alpha_o \, tg^2 \frac{U_m}{2} \frac{\cos^3 \frac{U_m}{2}}{1-\cos^3 \frac{U_m}{2}} \cdot R_m \, a^2 \sin^2 \varphi_o \quad (a)$$

$$I_{max} = 720\pi^3 \Delta_5 \frac{k^6 T_s^6}{h^5 c^4} \alpha_o \, tg^2 \frac{U_m}{2} \frac{\cos^3 \frac{U_m}{2}}{1-\cos^3 \frac{U_m}{2}} R_m \, a^2 \sin^2 \varphi_o \quad (b)$$

les valeurs respectives

$$I_{max} = \begin{cases} 4,10 \text{ kw/cm}^2 & (a) \\ 3,44 \text{ kw/cm}^2 & (b) \end{cases}$$

- Résultats théoriques correspondant à la prise en considération du diamètre apparent de la source .

Le calcul donne $\alpha = \frac{\pi a k T \sin \varphi_o}{hc} = 0,290$

$$\alpha_o = 1 - 1,554 \, \alpha^2 + 4,204 \, \alpha^4 - 0,298 \, \alpha^6 + \ldots\ldots$$
$$= 1 - 1,554 \cdot 0,08439 + 4,204 \cdot 0,00712$$
$$= 1 - 0,131 + 0,030 \simeq 0,9$$

D'où : $I_{omax} = 3,44 \times 0,9 = 3,1$ kw/cm^2

La procédure utilisée précédemment donne alors

$I_{min} = 0,067 \times 3,44 = 0,23$ kw/cm^2

$$I_{max} = \begin{cases} a. \ 3,44 \times 0,117 = 0,402 \text{ kw/cm}^2 \\ b. \ 3,44 \times 0,246 = 0,846 \text{ kw/cm}^2 \end{cases}$$

L'évaluation de l'importance relative du minimum et du maximum secondaire de la densité de flux énergétique à partir des données expérimentales (courbes radiométriques et photométriques) et des résultats théoriques fournit des valeurs du même ordre de grandeur :

- pour le minimum une valeur théorique de 7,4 % et des valeurs expérimentales comprises entre 6,4 et 7,3 % pour le rapport I_{min}/I_{omax}.

- pour le maximum secondaire, des valeurs théoriques de 13 à 27 % et des valeurs expérimentales comprises entre 15 et 24 % pour le rapport I_{Max}/I_{omax} .

Compte tenu de la précision médiocre de l'extrapolation graphique effectuée pour obtenir la valeur du maximum central de la densité d'énergie dans le plan focal ; l'accord entre les résultats théoriques et expérimentaux paraît assez satisfaisant.

- Résultats théoriques correspondant à l'approximation exponentielle $I(r) = I_o \exp(-Cr^2)$

$$C = 2\left(\frac{\pi a}{\lambda e}\right)^2 / p^2 \quad ; \quad \frac{a}{\lambda e} = 100$$

$C = 0,121$

Tableau de variation de $\varepsilon(r) = I(r)/I_o = e^{-2\eta^2}$

n_{mn}	1,269	2,013	2,973	3,960	4,964	5,961	6,953
η	0,311	0,494	0,730	0,97	1,22	1,46	1,71
$\varepsilon(\eta)$ Valeur théorique	0,82	0,61	0,35	0,15	0,067		
Valeur expérimentale	0,81	0,57	0,35	0,17	0,083	0,144	0,08

C) Conclusions .

La comparaison des prévisions théoriques et des résultats expérimentaux indique que le traitement proposé permet de rendre compte qualitativement et quantitativement (compte tenu de la précision des méthodes de mesures utilisées) de la variation de la densité de flux énergétique du rayonnement concentré dans le plan focal de miroirs paraboliques précis .

L'accord entre les courbes théoriques et expérimentales , notamment sous l'angle de l'existence d'un minimum et d'un maximum secondaire de la densité de flux , de leurs positions et importance relative , et de la valeur du maximum central de la densité de flux , paraît satisfaisant .

Dans la zone centrale de l'image focale , l'approximation exponentielle dérivée à partir des résultats théoriques permet une représentation analytique acceptable des données expérimentales et correspond à des écarts entre courbes théoriques et expérimentales nettement moins importants que ceux observés dans l'application du traitement théorique de R. APARISSI .

Les données expérimentales montrent , conformément aux hypothèses faites dans la conduite des calculs , que les résultats théoriques ne sont applicables qu'à des miroirs paraboliques à macrogéométrie suffisamment précise pour pouvoir être assimilés à des surfaces paraboliques parfaites . Toutefois , l'approximation exponentielle paraît pouvoir s'appliquer (tant qu'on se limite à la zone centrale de l'image focale) aussi bien aux miroirs précis qu'à ceux caractérisés par une macrogéométrie de perfection très approximative .

Les valeurs de rayon moyen des "grains de relief" des surfaces déduites des résultats théoriques et expérimentaux sont en accord avec les dimensions observées expérimentalement dans le cas de surfaces optiques correspondant à un polissage poussé .

BIBLIOGRAPHIE

(1) F. TROMBE Structure des machines utilisant l'énergie solaire Actes du colloque de New Delhi : Energie solaire et éolienne UNESCO 1956 pp 160 et suiv.

(2) A. LE PHAT VINH Répartition de l'énergie solaire au foyer d'un miroir parabolique . Jour. Rech. C.N.R.S. Nº 57 Déc. 1961 p 265 et suiv. ; Etude expérimentale de la concentration de l'énergie solaire par les miroirs courbés Applications thermiques de l'énergie solaire dans le domaine de la recherche et de l'industrie C.N.R.S. 1961 p 157 .

(3) G.I. MARKOV Tekhnologicheskie osobenosti izgotovlenija zhelezobetonnukh paraboloidnukh zerkaljnukh otrazhatelej gelioustanovok i nekotorue pokazateli ikh rabotu . Ispoljzovanie solnechnoj energii , Sk I Izd-vo Akad. Nauk 1957 p 99 et suiv.

(4) T. SAKURAI , O. KAMADA , K. SHISHIDO and K. INAGAKI Construction of a large solar furnace . Solar Energy Vol 8 , Nº 4 p 117 .

( ) P. MOON Proposed stantard solar radiation curves for engineering use Jour. Franklin Inst. Vol 230 , Nº 1379-23 Nov. 1940 pp 583-618 .

(6) N.B. REKANT Issledovanie otrazhajuchshikh poverkhnostej solnechnukh ustanovok Inzh. Fiz. Zhur , T II Nº 5,1959 pp 20-27 ; Kand. Dissert. Akad. Nauk S.S.S.R 1959 .

CINQUIEME PARTIE : INCIDENCE DES PARTICULARITES DE LA COURBE DE REPARTITION DE L'ENERGIE DANS LE PLAN FOCAL SUR L'ENERGIE ENCERCLEE DANS LA TACHE FOCALE. FACTEURS QUI DETERMINENT LA VARIATION DE L'ENERGIE ENCERCLEE. DISCUSSION ET CONCLUSIONS

I VARIATION DE L'ENERGIE ENCERCLEE DANS LA TACHE FOCALE ET SON RAPPORT AVEC LES PARTICULARITES DE LA COURBE DE REPARTITION DE L'ENERGIE. DISCUSSION DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX ANTERIEURS.

La plupart des auteurs de travaux expérimentaux sur la courbe de répartition de l'énergie et la variation de l'énergie encerclée dans le plan focal des miroirs paraboliques précis (F. Trombe, M. Foex et Mlle La Blanchetais [1], V.B. Veinberg, G.Y. Konaeva, D.K. Sattarov [2], R.A. Zakhidov, D.I. Tepliakov [3] H. Blau [4]) n'examinent pas la question d'un rapport ou d'une corrélation éventuels (pourtant prévisibles a priori) entre les courbes expérimentales correspondantes. Quant aux traitements théoriques (R.Aparissi [5], Le Phat Vinh [6], V.A. Baum; R. Aparissi et D.I. Tepliakov [7], O. Kamada [8], on a déjà constaté qu'ils ne permettaient pas généralement de rendre compte de façon satisfaisante des observations expérimentales. De plus, leurs auteurs ne s'intéressent pas particulièrement au rapport signalé.

F. Cabannes et Le Phat Vinh [9], E. Loh, P. Duwez, N.K. Hiester et T.E. Tietz [10] et plus récemment encore A. Maréchal et S. Slansky [11] ont calculé des courbes théoriques ou mentionné un résultat relatifs à l'énergie encerclée dans le plan focal de miroirs paraboliques ; bien qu'obtenus à partir de l'optique géométrique, ces résultats fournissent une importante et intéressante base de discussion dans l'examen des résultats

.../...

théoriques et expérimentaux relatifs à la répartition de l'énergie et à la variation de l'énergie encerclée dans le plan focal des miroirs paraboliques. En admettant une uniformité de la brillance du disque solaire, E. Loh, P. Duwez, N.K. Hiester et T.E. Tietz, A.Maréchal et S. Slansky montrent que le rapport entre le flux F_g concentré à l'intérieur de l'image de Gauss de la source et le flux F_t réfléchi par la surface du miroir a une valeur au plus égale à $F_g / F_t = \cos^4(Um/2)$. Traduit en termes d'énergie encerclée dans le plan focal, ce résultat conduit, pour un miroir parabolique de 60° d'ouverture, à une énergie encerclée par l'image de Gauss au plus égale aux 9/16 de l'énergie totale concentrée dans le plan focal.

La confrontation des courbes théoriques et expérimentales correspondant aux travaux antérieurs avec le résultat précédent, compte tenu de l'incidence inévitable des imperfections géométriques présentes chez tous les miroirs réels (notamment diminution de l'importance relative de l'énergie encerclée dans l'image de Gauss), conduit à des contradictions et incohérences qui semblent insurmontables :

- S'agissant des courbes théoriques, celles à palier horizontal (F.Cabannes et Le Phat Vinh) ou à point méplat (Le Phat Vinh, O. Kamada) aussi bien que la courbe exponentielle de R. Aparissi, présentent toutes une décroissance de la densité de flux énergétique dans le plan focal incompatible avec l'ordre de grandeur de la fraction de l'énergie totale réfléchie constituée par l'énergie encerclée dans l'image de Gauss de la source : une concordance satisfaisante exigerait en effet une décroissance beaucoup moins rapide de la densité de flux énergétique (qui devrait, dans le cas de la courbe théorique à palier ou à méplat, garder les 9/10 de sa

.../...

valeur maximale à une distance du foyer géométrique égale au double du rayon de l'image de Gauss).
- Dans le cas des courbes expérimentales (ou théoriques) à décroissance abrupte et monotone (d'allure exponentielle) de la densité de flux énergétique dans le plan focal, on est encore conduit à faire la même constatation.

La seule exception est constituée par la courbe photométrique de R. Aparissi, pour laquelle l'intégration graphique conduit à une énergie encerclée par l'image de Gauss égale à la moitié de l'énergie totale réfléchie par la surface du miroir, au lieu de 54% d'après la relation de E. Loh, P. Duwez et N.K. Hiester, A. Maréchal et S. Slansky.

Le désaccord, pour les autres travaux tant théoriques qu'expérimentaux cités, entre les valeurs de l'énergie encerclée par l'image de Gauss de la source et celle résultant de la relation de E. Loh, P. Duwez et N.K. Hiester, A. Maréchal et S. Slansky, est non seulement manifeste, mais encore trop important pour pouvoir être justifié soit par les approximations faites dans les calculs, soit par les erreurs habituelles de mesure. A titre d'exemple, la courbe théorique de R. Aparissi (tout comme les courbes expérimentales classiquement admises) prévoit, dans le cas des miroirs paraboliques précis du type "projecteur de D.C.A.", une énergie encerclée dans l'image de Gauss atteignant 80 à 90% de l'énergie totale réfléchie par la surface du miroir ; les courbes théoriques à palier horizontal de F. Cabannes et Le Phat Vinh ou à point méplat de Le Phat Vinh et O. Kamada conduisent également à une valeur relative du même ordre pour l'énergie encerclée dans l'image de Gauss de la source.

.../...

II DISCUSSION DES RESULTATS THEORIQUES DU TRAITEMENT PROPOSE ET DES NOUVEAUX RESULTATS EXPERIMENTAUX

L'accord assez satisfaisant entre les valeurs relatives de l'énergie encerclée par l'image de Gauss respectivement déduites de la courbe photométrique de R. Aparissi et de la relation de E. Loh, P. Duwez, N.K. Hiester et T.E. Tietz, A. Maréchal et S. Slansky permet de prévoir à l'avance qu'il devrait en être de même pour nos résultats théoriques et expérimentaux.

De fait, l'évaluation graphique, conduite à partir des courbes théoriques et expérimentales relatives à différents miroirs paraboliques précis du type "projecteur de D.C.A." donne les résultats suivants :

- Courbes théoriques (miroirs de 60 à 62° d'ouverture et de bonne qualité optique)

1. Miroir G.U.-2 étudié par R. Aparissi : ouverture angulaire U_m = 61° 52', diamètre 2,05 m, distance focale f = 0,847 m. Rayon moyen des grains de relief de la surface : a = 0,057mm. Energie encerclée par l'image de Gauss dans le plan focal (en fraction de l'énergie totale réfléchie par le miroir) E_g / E_t = 50%

2. Miroir parabolique du Laboratoire de l'énergie solaire de Mont-Louis : ouverture angulaire U_m = 60°44', diamètre 1,50 m, distance focale f = 0,6402 mm.
Rayon moyen des grains de relief de la surface : a =
Valeur relative de l'énergie encerclée par l'image de Gauss de la source (soleil ou lune) E_g/E_t = 45%

- Courbes expérimentales

1. Pour le miroir G.U.-2 étudié par R. Aparissi, l'intégration graphique effectuée à partir des données expérimentales conduit à une fraction du flux total réfléchi par le miroir présente dans l'image de Gauss égale à 50%.

2. Pour le miroir parabolique étudié à Mont-Louis

.../...

(petit miroir de 1,50 m fonctionnant sans héliostat) la même procédure appliquée aux courbes photométrique et radiométrique donne comme résultat 40% du flux total réfléchi localisé dans l'image de Gauss de la source.

3. Pour des miroirs paraboliques de 2 m de diamètre, fonctionnant avec un héliostat, et servant de fours solaires à Mont-Louis, la fraction du flux total réfléchi encerclée par l'image de Gauss varie également autour de 40%.

Ces résultats indiquent, en accord avec la relation de E. Loh, P. Duwez, N.K. Hiester et T.E. Tietz, A. Maréchal et S. Slansky, que même pour des miroirs paraboliques précis (bonne macrogéométrie et assez excellente qualité optique de surface), une fraction importante de l'énergie concentrée dans le plan focal (50% et plus) n'est en fait disponible qu'en dehors de l'image de Gauss de la source (soleil en général).

Les travaux théoriques antérieurs ci-dessus mentionnés paraissent, à première vue, ne conférer qu'un caractère trivial, voire superflu, à la discussion présente ; ce serait alors perdre de vue qu'il s'agit moins d'insister sur l'ordre de grandeur de la valeur relative (rapportée à celle de l'énergie totale réfléchie) de l'énergie encerclée par l'image de Gauss de la source que sur l'inconsistance des valeurs prévues théoriquement (A. Maréchal et S. Slansky) ou observées expérimentalement (F. Trombe, M. Foex et Mlle La Blanchetais, R.A. Zakhidov et D.I. Tepliakov, A. Moumouni) avec le profil des courbes tant théoriques qu'expérimentales relatives à la répartition de l'énergie dans le plan focal de miroirs paraboliques devenues classiques.

.../...

De plus, la présence et l'importance du maximum secondaire de la densité de flux énergétique dans le plan focal permet d'envisager des applications intéressantes tirant parti de cette particularité, applications susceptibles de conduire à une amélioration sensible du rendement d'installations solaires à concentrateurs paraboliques précis, plus particulièrement de celles destinées à une conversion de l'énergie solaire.

III.- FACTEURS QUI DETERMINENT LA VARIATION DE L'ENERGIE ENCERCLEE DANS LE PLAN FOCAL.

La variation de l'énergie encerclée dans le plan focal étant étroitement liée à la courbe de répartition de l'énergie, les facteurs qui l'influencent sont ceux là mêmes qui contribuent à déterminer le profil de cette courbe : qualité de la macrogéométrie et caractéristiques optiques (pouvoir réflecteur macroscopique et indicatrice de réflexion, ou, ce qui revient au même, dimension moyenne des grains de relief de la surface du miroir), ouverture du miroir, étendue du spectre et répartition spectrale de l'énergie du rayonnement incident, diamètre apparent de la source.

1. Les hypothèses simplificatrices faites ne permettent d'appliquer le traitement proposé qu'à des miroirs paraboliques à macrogéométrie pouvant être considérée comme pratiquement parfaite (angle d'écart moyen d'un ordre de grandeur nettement inférieur à celui du diamètre apparent de la source du rayonnement incident). L'influence de la qualité optique de la surface du miroir se manifeste par l'intervention directe du rayon moyen des grains de relief dans l'expression de la densité de flux énergétique tant au foyer géométrique qu'en un point quelconque du plan focal : en effet, non seulement ce paramètre détermine la valeur maximale de la densité

.../...

de flux, mais encore de lui dépend le caractère plus ou moins brutal de la décroissance de cette dernière dans la zone centrale de la tache focale, les positions et importance relative des minimum et maximum de la densité de flux dans le plan focal. Toutes choses égales par ailleurs, la valeur maximale de la densité de flux énergétique varie avec le paramètre a suivant une loi illustrée par la figure 1 ; sa valeur asymptotique, qui a pour expression

$$48\pi\Delta_s R_m \operatorname{tg}^2\frac{U_m}{2}\cdot\frac{\cos^3 U_m/2}{1-\cos^3 U_m/2}\cdot\frac{k^4 T_s^4}{\quad}\times$$
$$\times\left[4+\sqrt{2}\,(1+\cos U_m)(2-\cos U_m)\sqrt{1-\cos U_m}\right].$$

présente, aux facteurs dépendant de l'ouverture du miroir près, une analogie frappante avec celle de la densité de flux rayonnée sur une surface par un corps noir à la température T_s^o K. Les minimum et maximum secondaire de la densité de flux énergétique dans le plan focal se rapprochent du foyer géométrique du miroir quand le rayon moyen des grains de relief prend des valeurs de plus en plus grandes.

En utilisant l'approximation exponentielle applicable dans la zone centrale de la tache focale (rayon de l'ordre de celui de l'image de Gauss de la source), le calcul conduit aux résultats suivants :

a) En accord avec les résultats précédents (faibles valeurs du paramètre a), la valeur maximale de la densité de flux énergétique croit comme le carré du rayon moyen des grains de relief de la surface du miroir.

b) L'énergie encerclée dans le plan focal par un cercle de rayon R centré sur le foyer géométrique est, à un facteur près proportionnelle à $1 - \exp(2\pi^2\alpha^2 R^2/\lambda_c^2)$; elle augmente donc très rapidement

.../...

avec a et R. La fraction de l'énergie totale réfléchie par la surface du miroir que représente cette énergie encerclée, d'après un calcul qui n'offre aucune difficulté a pour expression :

$$\frac{Eg}{Et} = \frac{\pi^2 tg^2 \frac{Um}{2} \mathcal{U} \int_{\lambda m}^{\lambda M} E_\lambda R_\lambda d\lambda/\lambda^2}{\int_{\lambda m}^{\lambda M} E_\lambda R_\lambda d\lambda} \left[1 - e^{-2\left(\frac{\pi a R}{\lambda e}\right)^2}\right]$$

2. L'influence de l'ouverture du miroir sur la valeur maximale de la densité de flux énergétique comme sur l'énergie encerclée dans le plan focal apparaît comme très complexe : elle s'exerce, en effet, à travers le facteur

$$\frac{1}{15} tg^2 \frac{Um}{2} \frac{\cos^3 \frac{Um}{2}}{1 - \cos^3 \frac{Um}{2}} \left[4 + \sqrt{2}(1+\cos Um)(2-3\cos Um)\sqrt{1+\cos Um}\right]$$

En considérant séparément la variation des deux facteurs

$$d_o = \frac{1}{15}\left[6(1-x^5) - 5(1-x^3)\right]$$

et $tg^2 \frac{Um}{2} \frac{\cos^3 \frac{Um}{2}}{1 - \cos^3 \frac{Um}{2}}$,

on déduit aisément que pour $0 \leq Um \leq 90°$ leur produit est monotone croissant. La densité maximale de flux énergétique et l'énergie encerclée dans l'image de Gauss de la source, augmentent donc avec l'ouverture angulaire du miroir.

3. L'incidence de l'étendue du spectre et de la répartition spectrale de l'énergie du rayonnement incident tant sur la valeur maximale de la densité de flux énergétique dans le plan focal que sur celle de l'énergie encerclée dans le plan focal revêt un caractère très complexe; elle se traduit, d'une part, par le facteur Δ_5, de l'autre par le terme en T^4_s. Il s'ensuit, conformément

.../...

à ce qu'on pouvait prévoir a priori que les deux grandeurs énergétiques discutées augmentent avec la température du corps noir dont le rayonnement est "équivalent" à celui que reçoit la surface du miroir et aussi avec l'étendue du spectre couvert par les radiations incidentes. Bien entendu, la masse optique de l'atmosphère (cas du rayonnement solaire ou de la pleine lune) contribue, précisément par l'entremise de la température du corps noir "équivalent" (puisque cette dernière dépend étroitement de l'épaisseur de l'atmosphère traversée par le rayonnement) à déterminer aussi bien la valeur maximale de la densité de flux énergétique dans le plan focal que l'importance de l'énergie encerclée dans le plan focal. Cependant, la loi correspondante apparaît comme trop complexe pour pouvoir être explicitée.

BIBLIOGRAPHIE

1. F. Trombe, M. Foex et Melle La Blanchetais, Loc cit Ière et IIIème parties
2. V.B. Veinberg, G. Y. Konaeva, D.K. Sattarov, Loc cit Ière partie
3. R.A. Zakhidov, D.I. Tepliakov, Loc cit Ière partie
4. H. Blau, Loc cit Ière partie
5. R. Aparissi, Loc cit Ière partie
6. Le Phat Vinh, Loc cit Ière partie
7. V.A. Baum, R. Aparissi et D.I. Tepliakov, Loc cit Ière partie
8. O. Kamada, Loc cit partie
9. F. Cabannes et Le Phat Vinh, Loc cit Ière partie

10. E. Loh, P. Duwez, N.K. Hiester et T. E. Tietz, Theoretical considerations on performance characteristics of solar furnaces, Stanford Research Institute 1956

11. A. Maréchal et S. Slansky, in Applications thermiques de l'énergie solaire dans le domaine de la Recherche et de l'industrie Colloq. Int. C N R S Edit C N R S 1961.